Beiträge zur Portefeuilleanalyse und zur Wirksamkeit einiger geldpolitischer Maßnahmen

Inauguraldissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Wirtschaftswissenschaft
(doctor rerum politicarum)
der Rechts- und Wirtschaftswissenschaftlichen
Fakultät der Universität des Saarlandes

vorgelegt von

Diplom-Volkswirt
JÖRG EBEL

Saarbrücken 1969

Beiträge zur Portefeuilleanalyse und zur Wirksamkeit einiger geldpolitischer Maßnahmen

Inauguraldissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Wirtschaftswissenschaft
(doctor rerum politicarum)
der Rechts- und Wirtschaftswissenschaftlichen
Fakultät der Universität des Saarlandes

vorgelegt von

Diplom-Volkswirt
JÖRG EBEL

Saarbrücken 1969

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der Disputation	:	12. Februar 1969
Dekan	:	Professor Dr. Hans Zacher
Erstberichterstatter	:	Professor Dr. Rudolf Richter
Zweitberichterstatter	:	Professor Dr. Hans Schneeweiß

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41542713_0034

G l i e d e r u n g

		Seite
I.	Problemstellung	1
II.	Die Giralgeldschöpfung	5
	1. Skizzierung des traditionellen Ansatzes	5
	2. Der Ansatz von Smith	6
	3. Kritik des Ansatzes von Smith	12
III.	Die Entscheidung bei Risiko	17
	4. Die Erklärung gemischter Portefeuilles	17
	5. Über den Zusammenhang der Entscheidungskriterien bei Sicherheit und Risiko	19
	6. Zur Axiomatik des Bernoulli-Nutzens	22
	7. Die Ermittlung optimaler Portefeuilles	34
	7.1. Die Slutsky-Gleichungen bei zwei Anlagemöglichkeiten	34
	7.2. Die Slutsky-Gleichungen bei n Anlagemöglichkeiten und quadratischer Nutzenfunktion	41
	7.3. Die Verwendung von μ,σ-Prinzipien	46
	7.3.1. Über den Zusammenhang zwischen der Maximierung des erwarteten Nutzens und der Entscheidung auf Grund von μ,σ-Prinzipien	46
	7.3.2. μ,σ-Analyse und Haushaltstheorie	54
	7.3.3. μ,σ-Analyse und die Frage des "point of bliss"	59
	7.3.4. μ,σ-Analyse und die Bestimmung der optimalen Bilanzlänge	69
	7.3.5. μ,σ-Analyse und die Restriktion der Liquiditätssicherung	74
	7.4. Das Problem der Portefeuillebestimmung bei schwankenden Einlagen	79
	8. Die simultane Bestimmung von optimalem Konsum und optimalem Portefeuille	84
	8.1. Der Zusammenhang mit dem Fisher'schen Ansatz zur Ermittlung des optimalen Konsums	84
	8.2. Der Fall der konstanten absoluten Risikoaversion	89
	8.3. Der Fall der konstanten relativen Risikoaversion	93

Seite

9. Konkurrenzgleichgewicht und Entscheidung bei Risiko 103

9.1. Die Analyse von Arrow 103

9.1.1. Darstellung 103
9.1.2. Kritik 106

9.2. Die Analyse von Lintner 110

9.2.1. Darstellung 110
9.2.2. Kritik 115

IV. Die Einbeziehung der Financial Intermediaries in ein makroökonomisches Modell 125

10. Der Einfluß der Mindestreserven auf die Wirksamkeit der Offenmarktpolitik 125

11. Der Einfluß der Nonmonetary Financial Intermediaries auf die Wirksamkeit der Offenmarktpolitik 142

V. Zusammenfassung 154

Anhang I 159

Anhang II 162

Anhang III 164

Anhang IV 166

Literaturverzeichnis 169

I. Problemstellung

Weder im Rahmen der Geldschöpfungstheorie noch bei Keynes kommt die für Banken unterstellte Zielfunktion klar zum Ausdruck. Überprüft man, welches Bankverhalten mehr oder weniger deutlich impliziert wird, so zeigt sich eine gewisse Dichotomie. Entweder decken sich die von Keynes und die von der Geldschöpfungstheorie gemachten Annahmen nicht, oder Keynes legt seinem System - ohne dies weiter zu begründen - unterschiedliche Prämissen über das Verhalten der Banken einerseits und der Nichtbanken andererseits zugrunde.

Zur Erläuterung gehen wir von der geldwirtschaftlichen Seite im Keynes'schen System aus. Da üblicherweise angenommen wird, daß das Geldangebot ($\bar{M}$) konstant ist, gilt folgende Gleichgewichtsbedingung:

$$L(r,Y) = \bar{M}$$

r = Zinssatz
$\bar{M}$ = Geldmenge
Y = Volkseinkommen
$L = L(r,Y)$ = Geldnachfragefunktion

Man kann sofort die Frage stellen, welcher Geldmengenbegriff benutzt wird. Keynes[1] spricht von "the quantity of money as determined by the action of the central bank". Dies ist nicht eindeutig. Es kann darunter die Zentralbankgeldmenge allein [a)] verstanden werden - so die Interpretation von E. Schneider[2]. Es ist aber auch möglich, den aus der volkswirtschaftlichen Gesamtrechnung bekannten Geldmengenbegriff[3] [b)] zugrunde zu legen, wie dies bei

---

1) J.M. Keynes [49], S.247.

2) E. Schneider [100], S.82 (insbesondere Fußnote 1)) und S.195. Die Darstellung in E. Schneider [99], S.326f., ist unklar. Einerseits werden als Bestandteil der Geldmenge die Sichtguthaben bei Kreditbanken aufgeführt. Andererseits schließt Schneider unter den Wirtschaftssubjekten, die Geld nachfragen, die Kreditbanken - im Gegensatz zur Zentralbank - nicht explizit aus.

3) A. Stobbe [102], S.76.

McKenna[1], Shapiro[2] und offenbar auch bei Ackley[3] der Fall ist.

Zu a): In der Geldnachfragefunktion ist bei dieser Auffassung die von Kreditbanken nachgefragte Zentralbankgeldmenge enthalten. Es wird für Kreditbanken also - wie für jeden anderen Teilbereich des privaten Sektors - eine vom Zins abhängige geplante Kassenhaltung unterstellt.

Vergleicht man diese Betrachtung mit der von Schneider[4] bei der Erörterung des Geldschöpfungsmultiplikators vertretenen Auffassung, so zeigt sich die oben erwähnte Dichotomie. Schneider stellt fest, daß eine einzelne Bank "natürlich" bemüht sei, "Kredite in Höhe der gesamten Überschußreserve zu geben, weil jedes Brachliegen von Zentralbankgeld Zinsverluste" bringe[5]. Es wird folglich angenommen, daß die geplante Kassenhaltung vom Zins nicht abhängt. Hierzu sind einige Anmerkungen erforderlich:

aa) Der als selbstverständlich angesehene Verzicht auf das Halten von Überschußreserven stellt den einfachsten Fall dafür dar, daß Banken beim Erwerb von Aktiva[6] einen festen von den Preisen (Zinsen) unabhängigen Schlüssel für die Aufteilung der ihnen zur Verfügung stehenden Beträge verwenden.

ab) Die fehlende Preisabhängigkeit ist nicht unbedingt "natürlich"; es sei denn, von Schneider wird angenommen, daß es möglich ist, einen positiven Zins mit Sicherheit zu erzielen. Andernfalls könnte es für Banken durchaus

---

1) J.P. McKenna [69], S.117 und insbesondere S.122ff.

2) E. Shapiro [93], S.424 und 438 ff.

3) G. Ackley [1], S.366. Er spricht zwar nur von "total supply of money". Doch wenn dieser Begriff ohne Zusatz gebraucht wird, sind jedenfalls Sichtguthaben bei Kreditbanken eingeschlossen.

4) E. Schneider [100], S.40.

5) Schneider spricht in Fußnote 2) auf S.40 noch deutlicher davon, daß "Überschußreserven immer Ausdruck von Dispositionsfehlern der Gelddisponenten der Geschäftsbanken" seien.

6) hier: Forderungen gegenüber Zentralbank bzw. Nichtbanken.

sinnvoll sein, Überschußreserven anzulegen[1]. Dann aber müßte begründet werden, warum Nichtbanken von dieser Möglichkeit keinen Gebrauch machen, warum also Nichtbanken Zentralbankgeld nachfragen.

ac) Es ist bei Gültigkeit von Annahme a) nicht zu erkennen, welche Bedeutung der Geldschöpfungstheorie im Rahmen einer an Keynes angelehnten makroökonomischen Gleichgewichtsanalyse zukommt. Letztere läßt sich diskutieren, ohne daß auf die Geldschöpfungstheorie jemals verwiesen werden müßte.

Zu b): Die zweite Interpretation enthält bei der Behandlung von Banken und Nichtbanken die gleiche Dichotomie wie die erste. Planten die Banken in ähnlicher Weise wie die übrigen Gruppen des privaten Sektors, eine vom Zins abhängige Kasse zu halten, dann könnte die Zentralbank zwar immer noch auf das Geldangebot Einfluß nehmen, doch müßte es als eine vom Zins abhängige Funktion dargestellt werden. Der letzte Einwand erscheint als nicht wesentlich. An die Stelle der völlig unelastischen Geldangebotsfunktion ist eine elastische zu setzen.

Indes, die oben angedeutete dichotomistische Betrachtungsweise spielt in der Literatur eine nicht geringe Rolle. Sie liegt einem guten Teil der Diskussion des Geldangebots zugrunde, sie bewirkt, daß die Geldschöpfungstheorie in der Regel aus dem Rahmen der sonstigen Gleichgewichtsanalyse herausfällt und hat mit dazu beigetragen, daß die Funktion der Banken im Vergleich zu sonstigen Financial Intermediaries[2] nicht immer klar gesehen wird.

---

1) Vgl. z.B. J. Tobin [111], S.71ff.

2) R.W. Goldsmith ([34], S.50-51) grenzt diese Gruppe wie folgt ab: "Financial intermediaries are taken to include all financial enterprises with the exception of two types: (1) units whose assets consist predominantly of the securities of, or of claims against, wholly owned or majority-owned subsidiaries and affiliates (holding companies); and (2) units owned by one or a small group of individuals, or by corporations or nonprofit organizations, if they make no substantial use of outside funds; i.e. enterprises identical with or similar to what are usually called personal holding

Diese Dichotomie gab den Anstoß zur vorliegenden Arbeit, deren wichtigste Abschnitte sich wie folgt gliedern:

Zunächst soll die Richtung skizziert werden, in die jene Ansätze münden, die von einer Verfeinerung der üblichen Geldschöpfungstheorie ausgehen. Im wesentlichen werden wir uns dabei auf eine Arbeit von P.F. Smith[1] stützen. In der Kritik wird zu begründen versucht, warum ein solcher Weg nicht sehr weit führt, und warum es unerläßlich erscheint, die Preise ebenso explizit zu berücksichtigen wie im mikrotheoretischen Bereich bei der Portefeuilleanalyse. Deren Darstellung ist der zweite und größte Abschnitt gewidmet, wobei wir von dem Problem ausgehen, inwieweit sich die Slutsky-Gleichungen[2] auf die Portefeuilleanalyse übertragen lassen. Hierbei zeigen sich wichtige Parallelen zwischen der Haushaltstheorie und der Bestimmung optimaler Portefeuilles mit Hilfe von μ,σ-Prinzipien[3]. Im weiteren wird die Frage behandelt, inwieweit sich die Analyse im μ,σ-Diagramm auch zur Ermittlung der optimalen Finanzierung und optimalen Bilanzlänge benutzen läßt, und inwieweit hierbei neben der Budgetbeschränkung die Restriktion der Liquiditätssicherung berücksichtigt werden kann. Außerdem werden einige Aspekte der simultanen Bestimmung von Konsumhöhe und Portefeuillestruktur, der Paretooptimalität bei Risiko und des partialanalytischen Gleichgewichts auf dem Wertpapiermarkt erörtert.

---

companies." Unter "financial enterprises" wiederum versteht er ([34], S.50) "all economic units - business enterprises as well as nonprofit and government organizations - that are primarily engaged in the holding of and trading in intangible assets (claims and equities)."

1) P.F. Smith [96].

2) J.R. Hicks [42], S.309.

3) Es handelt sich hierbei um Entscheidungsprinzipien, die bei der Auswahl von Wahrscheinlichkeitsverteilungen nur den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ zugrunde legen. Vgl. hierzu H. Schneeweiß [98], S.52ff.

Schließlich wird in einem makroökonomischen Modell die in der Literatur behandelte Frage aufgegriffen, unter welchen Bedingungen hohe Mindestreservesätze stabilisierend wirken[1]. Wenn man - wie es die Portefeuilleanalyse nahelegt - die Preise explizit berücksichtigt, fällt die Antwort hierauf keineswegs mehr so eindeutig aus wie bei der Geldschöpfungstheorie. Dieses im Prinzip bekannte Ergebnis[2] wird bestätigt und einer leichten Interpretation zugänglich gemacht. Darüber hinaus lassen sich Anhaltspunkte für die Beurteilung der Effizienz der Offenmarktpolitik bei einem Anwachsen der Nonmonetary Financial Intermediaries[3] finden.

II. Die Giralgeldschöpfung

1. Skizzierung des traditionellen Ansatzes

Grundsätzlich gehen die üblichen Darstellungen der Giralgeldschöpfung[4] von der folgenden Überlegung aus: Besitzt eine Bank Überschußreserven in Höhe von Z und weiß sie,

---

1) Vgl. W.C. Brainard [15], R. Richter [8o], J. Tobin and W. C. Brainard [11o].

2) Vgl. die in Fußnote 1) angegebenen Quellen. Im Rahmen der traditionellen Geldschöpfungstheorie wird man hohen Mindestreservesätzen auf jeden Fall eine stabilisierende Wirkung zusprechen.

3) Unter Nonmonetary Financial Intermediaries versteht man - etwas vereinfacht - die Gruppe der Financial Intermediaries (vgl. S.3 Fußnote 2)) ohne die Kreditbanken. Eine genauere Begriffsbestimmung findet sich bei J.G. Gurley and E. Shaw [36], S. 192 f.

4) Zum Beispiel P.A. Samuelson [85], S. 296 ff.
E. Schneider [1oo], S. 24, insbesondere S. 44 ff.
L. Tarshis [1o5], S. 289 ff.
W.A. Koivisto [5o], S. 297 ff.

daß jede DM eines zusätzlich gewährten Kredits zu einer Verringerung der Überschußreserve um λ führt, so kann sie maximal zusätzliche Kredite ($=\Delta Kr$) in Höhe von $\Delta Kr = Z/\lambda$ gewähren. In der Regel wird dabei für die einzelne Bank $\lambda = 1$ unterstellt. Für das Bankensystem als Ganzes hingegen wird im einfachsten Fall angenommen, daß der Verlust an Überschußreserven für jede DM eines zusätzlich gewährten Kredits gleich dem Mindestreservesatz ρ ist; oder - und hier handelt es sich bereits um eine erste einfache Modifikation - wenn das Bankensystem einen zusätzlichen Kredit gewährt, verliert es pro DM an Überschußreserven: c durch Bargeldabfluß und $\rho(1-c)$ wegen erhöhter Mindestreserveverpflichtungen. Damit gilt: $\Delta Kr = Z/(\rho+c(1-\rho))$. Von diesem Grundprinzip lassen sich beliebige Verfeinerungen herleiten, wenn man den Koeffizienten λ näher überprüft. Brunner[1] hat sich der Mühe unterzogen, alle für die USA relevanten institutionellen Gegebenheiten im obigen Ansatz zu berücksichtigen. Er unterscheidet z.B. Anteile eines zusätzlich gewährten Kredits, die

a. in bar abgehoben,
b. auf Terminguthaben umgebucht,
c. von den Kreditnehmern als Sichtguthaben gehalten,
d. auf Sichtguthaben bei der gleichen Bank bzw.
e. auf Sichtguthaben bei einer anderen Bank überwiesen werden.

Trotz dieser Differenzierungen bleibt der Hauptnachteil solcher Ansätze erhalten: Mit ihrer Verwendung starrer preisunabhängiger Koeffizienten entfernen sie sich stark von der gewohnten Gleichgewichtstheorie. Am deutlichsten kommt dies in der von Smith gewählten Darstellungsweise zum Ausdruck, auf die wir im folgenden - ihrer größeren Übersichtlichkeit wegen - eingehen.

2. Der Ansatz von Smith[2]

Smith benutzt bei seiner Analyse des Geldschöpfungsmechanismus Markov'sche Ketten[3]. Mit ihrer Hilfe versucht er

1) K. Brunner [19]

2) P.F. Smith [96]. Es handelt sich um eine freie Wiedergabe der wichtigsten Gedanken aus dieser Arbeit.

3) Zur Erläuterung siehe Anhang I. Dort werden einige

zu zeigen, wie bestimmte Transaktionen nach Ablauf einer gewissen Zeit nicht nur die Geldschöpfungsfähigkeit der Banken sondern auch die Höhe anderer Transaktionen beeinflussen - beispielsweise ist an die Wirkung zu denken, die die Eröffnung eines Sichtguthabens bei Kreditbanken durch Einzahlung von Zentralbankgeld auf die Ausgaben für Wertpapiere oder bestimmte Güter in den folgenden Perioden hat. Der gewählte Ansatz ist also dynamisch. Da seine Zielsetzung recht weit gespannt ist, erscheint eine kritische Erörterung notwendig.

Um den Zusammenhang mit der traditionellen Darstellung (vgl. 1.) deutlich werden zu lassen, gehen wir von den dort benutzten Transaktionen aus[1]. Die für sie benutzten Symbole sind in der folgenden Aufzählung jeweils in Klammer gesetzt[2].

a. Die Erhöhung der Reservehaltung durch Kreditbanken gegenüber dem Bestand in Periode 1 (r_B)
b. Die Erhöhung des Zentralbankgeldbestandes bei Nichtbanken gegenüber dem Bestand in Periode 1 (r_{NB})
c. Die Erhöhung der von Banken gewährten Kredite gegenüber der Vorperiode (l)
d. Die Erhöhung der Sichteinlagen bei Banken gegenüber der Vorperiode (d)

Sätze über Markov'sche Ketten gebracht, die im vorliegenden Zusammenhang interessieren.

1) Diese Transaktionen sind zwar in 1. nicht so explizit hervorgehoben worden wie in der folgenden Darstellung, doch liegen sie jeder ausführlichen Behandlung der in 1. erwähnten Modifikation zugrunde.

2) r_B entspricht bei Smith ([96], S. 642) der Größe r; r_{NB} wird hier zusätzlich berücksichtigt. Auf der anderen Seite fehlt in der obigen Darstellung die bei Smith vorgenommene Trennung von Sicht- und Termineinlagen mit ihren unterschiedlichen Reservesätzen. - In a. bis d. wird bis auf die genannten Modifikationen die Symbolik von Smith übernommen. Smith's Erläuterung für r, l, d ist nicht ganz eindeutig. Er bezeichnet z.B. r (bzw. l) als "increase in total reserves" (bzw. "increase in loans"). Eine korrekte Interpretation seines Ansatzes zeigt jedoch, daß die Bezugsperiode für die Größen r und l unterschiedlich sein muß. Vgl. hierzu auch das Beispiel auf S. 8 unten.

Folgt man der in 1. gebrachten Skizzierung, so hat die Höhe von r_B, r_{NB}, l und d in der einen Periode einen Einfluß auf die Höhe dieser Transaktionen in der nächsten Periode. Gilt beispielsweise in der ersten Periode: $r_B = r_{NB} = l = 0$ und $d = 1$ (erfolgt also eine Erhöhung der Sichteinlagen um eine DM), so ergibt sich in der nächsten Periode: $r_B = \rho$; $r_{NB} = 0$; $l = 1-\rho$; $d = 0$. Die zusätzlichen Sichteinlagen führen also dazu, daß ein Teil ρ als Reserve gehalten und ein Teil $1-\rho$ zur Kreditgewährung verwandt wird. Entsprechende Angaben lassen sich machen, wenn die einzelnen Transaktionen in der ersten Periode einen anderen Wert annehmen.

Dieser Sachverhalt kann durch eine Matrix beschrieben werden, bei der am Anfang jeder Zeile die auslösende Transaktion (der ersten Periode) und am Anfang jeder Spalte die resultierende Transaktion (der zweiten Periode) steht. Ihre Elemente w_{ij} geben den durchschnittlichen Prozentsatz an, der vom Wert einer Transaktion i in der ersten Periode für eine Transaktion j in der zweiten Periode benutzt wird ($i, j = r_B, r_{NB}, l, d$). Für die in 1. erwähnte Modifikation des einfachsten Modells zur Erläuterung der Geldschöpfung erhalten wir damit die folgende Matrix:

(1) $W =$

	r_B	r_{NB}	l	d
r_B	1	0	0	0
r_{NB}	0	1	0	0
l	0	c	0	1-c
d	ρ	0	1-ρ	0

(Die Kennzeichnung der Zeilen und Spalten erfolgt nur zur Verdeutlichung).

Faßt man bestimmte Werte von r_B, r_{NB}, l, und d als Zustände und die Elemente w_{ij} als Übergangswahrscheinlichkeiten auf, so entspricht W der zu einer Markov'schen Kette gehörenden Übergangsmatrix[1]. Die für Mar-

1) Vgl. Anhang I

kov'sche Ketten aufgestellten Sätze lassen sich damit anwenden. Insbesondere kann man mit Hilfe von W angeben, welchen Wert die einzelnen Transaktionen r_B, r_{NB}, l und d in einer beliebigen Periode annehmen, wenn sie in Periode 1 einen bestimmten Wert haben.

Gehen wir z.B. davon aus, daß in der ersten Periode ein zusätzlicher Kredit in Höhe von einer DM gewährt wird, so erhalten wir der Reihe nach die folgenden Transaktionen[1]:

	r_B	r_{NB}	l	d
1. Per.	0	0	1	0
2. Per.	0	c	0	1-c
3. Per.	$\rho(1-c)$	c	$(1-c)(1-\rho)$	0
4. Per.	$\rho(1-c)$	$c+c(1-c)(1-\rho)$	0	$(1-c)^2(1-\rho)$

usw.

Die Transaktionen r_B und r_{NB} sind sogenannte absorbierende Zustände, d.h. soweit ein bestimmter DM-Betrag zur Erhöhung des Bestandes an Zentralbankgeld benutzt wird - sei es bei Banken ($=r_B$) oder Nichtbanken ($=r_{NB}$) - werden hierdurch keine anderen Transaktionen ausgelöst[2]. Der durch W beschriebene Markov'sche Prozeß ist absorbierend - da er jedenfalls einen absorbierenden Zustand enthält[3]. Von Bedeutung ist dies, wenn wir im Rahmen des obigen Beispiels fragen, welche Gleichgewichtsänderung für Sichteinlagen und Kredite aus der Entscheidung der Banken resultiert, ihre Kredite um eine DM zu erhöhen. Zur Beantwortung wird der für absorbierende Markov'sche Ketten geltende Satz 4 des Anhangs I benutzt.

---

1) Vgl. hierzu Fußnote 2) auf S.7 oben. Wenn r_B und r_{NB} tatsächlich nur geplante Bestandsänderungen gegenüber der Vorperiode bezeichnen würden (wie l und d), so müßten die beiden ersten Spalten folgende Form haben:

0	0
0	c
$\rho(1-c)$	0
0	$c(1-c)(1-\rho)$

2) Beachte hierzu Fußnote 2) auf S.7 oben.

3) Vgl. Anhang I

Danach unterteilen wir zunächst die Matrix W in der durch die gestrichelten Linien angedeuteten Weise. Wird die Teilmatrix in der unteren rechten Ecke von W mit F bezeichnet, gilt also

$$(2) \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & 1-c \\ 1-\rho & 0 \end{bmatrix}$$

und verstehen wir unter E die (2x2)-Einheitsmatrix, so geben die Elemente n_{ij} (i, j=1, d) der Matrix

$$(3) \quad (E-F)^{-1} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{1d} \\ n_{d1} & n_{dd} \end{bmatrix}$$

nach Satz 4 an, wie oft im Durchschnitt eine Transaktion i (i=1, d) von einer DM zu einer Transaktion j (j=1, d) führt, ehe diese DM gänzlich zur Erhöhung des Bestandes an Zentralbankgeld bei Banken und Nichtbanken benutzt wird (d.h. ehe der Prozeß völlig absorbiert ist[1]). Dies läßt sich aber auch deuten als die insgesamt mögliche Erhöhung der Kredite (j=1) bzw. Sichtguthaben (j=d) aufgrund einer ursprünglichen Einzahlung von Zentralbankgeld (= Erhöhung der Sichteinlagen) in Höhe von einer DM. Die Berechnung von $(E-F)^{-1}$ führt zu:

$$(4) \quad (E-F)^{-1} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{1d} \\ n_{d1} & n_{dd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho+c(1-\rho)} & \frac{1-c}{\rho+c(1-\rho)} \\ \frac{1-\rho}{\rho+c(1-\rho)} & \frac{1}{\rho+c(1-\rho)} \end{bmatrix}$$

Man erkennt leicht, daß die Elemente n_{ij} die bekannten Multiplikatoren angeben[2].

Insoweit liegt nur eine andere Darstellung der üblichen Giralgeldschöpfungstheorie vor. Smith geht jedoch darüber hinaus, indem er die durch die Kreditgewährung (1) ermöglichten Transaktionen näher untersucht. Wir müssen

---

1) Vgl. Anhang I

2) Wenn in der tabellarischen Übersicht auf S.9 oben die Periodenzahl gegen ∞ strebt, so entspricht die zu 1 gehörende Spaltensumme dem Element n_{11} und die zu d gehörende Spaltensumme dem Element n_{1d}.

hierzu beachten, daß jede Kreditgewährung nicht nur die künftigen Einlagen bei den Banken sondern unmittelbar bestimmte Transaktionen tangiert wie z.B. die Ausgaben für Güter und Dienste, die Ausgaben für den Erwerb von Wertpapieren usw.. Diese Transaktionen, die im folgenden ganz allgemein mit t_k (k=1,...,n) bezeichnet seien, haben nach Smith[1] einen ähnlichen Einfluß aufeinander wie r_B, r_{NB}, 1 und d. Er kann allgemein durch die Matrix

$$(5) \qquad W' = \begin{bmatrix} w'_{11}, & \cdots, & w'_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ w'_{n1}, & \cdots, & w'_{nn} \end{bmatrix}$$

charakterisiert werden.

Die durch W und W' beschriebenen Markov'schen Prozesse verlaufen - so betont Smith - simultan, was wiederum anhand eines Beispiels verdeutlicht werden soll, für das wir folgende Annahmen treffen:

1) In Periode 1 erfolgt eine Erhöhung der Sichtguthaben um DM 1,-.

2) Jeder zusätzlich gewährte Kredit führt in der gleichen Periode ausschließlich zu einer Erhöhung der Ausgaben für Güter und Dienste ($=t_1$).

Wir erhalten damit folgendes Schema:

	r_B	r_{NB}	1	d	t_1	t_k
1. Per.	0	0	0	1	0	0
2. Per.	ρ	0	$1-\rho$	0	$1-\rho$	0
3. Per.	ρ	$c(1-\rho)$	0	$(1-c)(1-\rho)$	$(1-\rho)w_{11}$	$(1-\rho)w_{1k}$
usw.						(k=2,...,n)

Der Prozeß befindet sich erst im Gleichgewicht, wenn alle ursprünglich eingezahlten Einlagen als zusätzliche Reserven gehalten werden - ein Ergebnis, das bekannt ist.

---

1) P.F. Smith [96], S.637ff.

Wir fassen zusammen:
Es wird unterstellt, daß einzelne Transaktionen weitere Transaktionen induzieren. Die Einnahmen aus einer Transaktion werden in prozentual gleichbleibender Weise auf die induzierten Transaktionen aufgeteilt. Die Art der Aufteilung hängt von der ursprünglichen Transaktion ab.

Transaktionen, die die Reserven der Banken berühren und solche, die darauf keinen Einfluß haben, werden getrennt untersucht. Es wird betont, daß durch diese beiden Haupttypen von Transaktionen zwei getrennte Markov'sche Kettenprozesse ausgelöst werden. Die Tatsache, daß sich durch das Vorhandensein von Banken ein gesonderter Markov'scher Kettenprozeß ergibt, gilt als für diese charakteristisch. Der Grund hierfür wird darin gesehen, daß Banken im allgemeinen keine Überschußreserven halten wollen, und daß von Banken geschaffene Sichtguthaben mit Sicherheit von irgend jemand angenommen werden und somit dem Bankensystem insgesamt nicht verloren gehen. Von der Einlösung in Zentralbanknoten wird bewußt abgesehen.

Gleichzeitig sieht Smith hierin die Besonderheit von Einlagen bei Banken, die sie von Einlagen bei sonstigen Financial Intermediaries wesentlich und grundsätzlich unterscheidet. Für die Wirtschaftspolitik wird daraus die Rechtfertigung für eine gesonderte Behandlung von Bankeinlagen abgeleitet.

3. Kritik des Ansatzes von Smith

Entscheidend in Smith's Analyse ist die Annahme, daß einzelne Transaktionen in eindeutig determinierter Weise Transaktionen der folgenden Periode induzieren. Die Art der Abhängigkeit kommt in W und W'[1)] zum Ausdruck.

Eine eigentliche Begründung für diese Annahme liefert Smith nicht, doch geht er offenbar von einer mikroökonomischen Überlegung aus.

---

1) Vgl. oben S.8 und 11.

In der vorliegenden Kritik soll deren spezieller Charakter hervorgehoben und gezeigt werden, daß ihre Übertragung auf die Gesamtwirtschaft im allgemeinen zu falschen Schlüssen führt.

Smith[1] schreibt:

> "For example, an individual who receives funds as income is presumably more likely to use them for consumption expenditures than an individual who obtains money balances by selling securities. Since the disposition of funds in the second stage depends to some extent upon the initial transaction, the sequence of events can be described as a Markov process."

Die verschiedenen Ausgabekategorien werden also - wenn auch eingeschränkt[2] - einzelnen Einnahmekategorien zugeordnet, was sich mit den üblichen mikroökonomischen Ansätzen kaum begründen läßt.

Von Bedeutung ist bei diesen Ansätzen allein, daß die Ausgaben den insgesamt zur Verfügung stehenden Betrag nicht überschreiten dürfen; wie dieser Betrag letztlich zustande kommt, ist gleichgültig. Eine Ausnahme von diesem "Non-Affektationsprinzip" wird teilweise durch gesetzliche oder gewohnheitsmäßige Restriktionen begründet, wie sie z.B. dann vorliegen, wenn für Sicht- und Termineinlagen unterschiedliche Mindestreservesätze gelten. In diesem Fall können die Ausgaben einer Kreditbank für den Erwerb von Forderungen gegen Zentralbank und Nichtbanken den Einnahmen zugeordnet werden, die sie aus dem Verkauf von Sicht- bzw. Terminforderungen gegen sich selbst bezieht[3]. Doch scheint es willkürlich, wenn hieraus eine generelle Verhaltensannahme abgeleitet wird.

Selbst wenn wir aber davon ausgehen, daß die jeweiligen Ausgaben einzelnen Einnahmekategorien zugeordnet werden

---

1) P.F. Smith [96], S.636.

2) Die Einschränkung wird in der weiteren Analyse so gut wie nicht mehr berücksichtigt.

3) und zwar in einer der Matrix W entsprechenden Weise; vgl. P.F. Smith [96], S.642 f.

können, folgt damit im allgemeinen nicht die von Smith für die Gesamtwirtschaft angestellte Analyse. Am einfachsten läßt sich dies zeigen, wenn man seinen Ansatz in die Sprache der Preistheorie übersetzt. Den n Transaktionen[1] entsprechen danach die auf n verschiedenen Märkten für Forderungen bzw. Güter und Dienste getätigten Ausgaben.- Wenn gesagt wird, daß eine Ausgabe (Transaktion) eine andere induziere, wird man das wohl so verstehen müssen, daß die Nachfragefunktion auf jedem Markt isoelastisch ist[2]. Nur dann ist die Ausgabe in DM auf diesem Markt konstant - unabhängig vom Verlauf der Angebotsfunktion, unabhängig also davon, welcher Preis zustande kommt.

Legen wir in Periode 1 eine bestimmte Ausgabenhöhe auf den n Märkten zugrunde, so wissen wir, daß sich die einzelnen Ausgaben der folgenden Periode mit Hilfe der Matrix W' angeben lassen. Zur Erläuterung wird folgendes Beispiel angeführt:

Mit t°_{11}, t°_{21} und t°_{31} sei jeweils die Ausgabe auf Markt 1, 2 und 3 in Periode 1 bezeichnet; dann ergibt sich für die Ausgabe der Periode 2 bei

$$W'^{\circ} = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}0 & 0{,}9 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \end{bmatrix}$$

auf Markt 1 der Wert: $0{,}7t^{\circ}_{11} + 0{,}1t^{\circ}_{21} + 0{,}6t^{\circ}_{31}$

auf Markt 2 der Wert: $0{,}2t^{\circ}_{11} + 0{,}2t^{\circ}_{31}$

auf Markt 3 der Wert: $0{,}1t^{\circ}_{11} + 0{,}9t^{\circ}_{21} + 0{,}2t^{\circ}_{31}$

---

1) Vgl. oben S.11.

2) Die Nachfrager legen demnach nur den DM-Betrag fest, den sie aufwenden wollen, nicht aber die Mengen, die sie zu kaufen wünschen. Für eine solche Auffassung spricht insbesondere P.F. Smith [96], S.636.

In gleicher Weise lassen sich die Ausgaben für die folgenden Perioden ermitteln. Wichtig ist, daß sie im allgemeinen von den Größen t^{o}_{11}, t^{o}_{21} und t^{o}_{31} der ersten Periode abweichen. Damit unterscheiden sich aber auch die temporären Gleichgewichtspreise der einzelnen Perioden voneinander, wenn man von folgenden speziellen Möglichkeiten absieht:

a. die Angebotsfunktion ist völlig elastisch
b. sie verschiebt sich gleichzeitig mit der Nachfragefunktion in solcher Weise, daß genau der alte Gleichgewichtspreis zustande kommt.

Im allgemeinen wird man also damit rechnen müssen, daß sich der Preisvektor des temporären Gleichgewichts in jeder Periode ändert.

Es ist daher nicht möglich gleichzeitig anzunehmen, daß die Zeilenvektoren $[w_{k1},\ldots,w_{kn}]$ $(k=1,\ldots,n)$ aus W' von den Preisen abhängen, und daß sie auf den verschiedenen Stufen des Markov'schen Kettenprozesses - in den einzelnen Perioden also - unverändert bleiben.

Genau davon aber geht Smith aus.

Bei der Charakterisierung zweier Vektoren, die im wesentlichen der 3. und 4. Zeile aus W entsprechen[1], schreibt er[2]:

> "The values in this vector would be affected by the time deposit rates, bank charges, and other factors affecting the relative desirability of holding demand and time deposits."

Wenn hier die Abhängigkeit von zumindest einem Preis (time deposit rate) hervorgehoben wird, muß man die Preisabhängigkeit sinnvollerweise auch für die Vektoren der Matrix W' postulieren.

Daneben betont er[3]:

---

1) Genauer sind die Unterschiede in Fußnote 2) auf S.7 oben aufgeführt.

2) P.F. Smith [96], S.642.

3) ebenda S.636.

> "If we assume that the transitional probabilities do not depend upon the stage of the transaction, the process can be described as a finite Markov chain and, once the transitional matrix is established, the chain can be traced and the probable outcomes measured by standard mathematical procedures."

Da im allgemeinen - wie wir gesehen haben - die Preise in den einzelnen Perioden variieren, sind diese Feststellungen widersprüchlich.

Wenn betont wird, daß die Übergangswahrscheinlichkeiten in der Regel von den Preisen und damit von der Stufe des Markov'schen Prozesses abhängen, so ist nicht gesagt, daß sich ein solcher Prozeß nicht mehr analysieren liesse. Zur Bestimmung der Übergangswahrscheinlichkeiten müßten jedoch die Preise jeder Periode bekannt sein.

Man kann sich fragen, ob es dann noch des Konzepts der Markov'schen Ketten bedarf. Ein dynamisiertes Walras-Modell erschiene eher als adäquate Darstellung.

Smith zieht eine in Wirklichkeit stark partialanalytische Betrachtung zur Erklärung der Rolle der Banken und des Geldschöpfungsprozesses heran. Offenbar hat er als Empfänger von Transaktionen einzelne Individuen vor Augen[1)], deren Ausgaben die Preise in vernachlässigbarem Maße beeinflussen. Insoweit läßt sich die Annahme, daß die Übergangswahrscheinlichkeiten auf allen Stufen des Markov'schen Prozesses die gleichen sind, rechtfertigen. Wenn er aber auf der anderen Seite den gesamten Bankenapparat in die Analyse einbezieht, so gilt eben nicht mehr, daß die durch das Verhalten der Banken induzierten Ausgaben nur einen vernachlässigbaren Einfluß auf die Preise haben. Partialmodell und Totalmodell werden nicht scharf genug getrennt. Ein Vorwurf übrigens, den A. Lindbeck[2)] gegen die übliche Darstellung der Geldschöpfung ganz generell erhebt:

---

1) ebenda S.636.

2) A. Lindbeck [55], S.197, vgl. auch R. Richter [80].

> "The 'credit expansion multiplier' approach is fundamentally a partial equilibrium approach for financial markets. The method is rather different from conventional price theory, however, as asset prices and interest rates are not explicitly considered. By way of comparison, input-output analysis with fixed production coefficients is a somewhat similar approach, though applied to other types of problems; the formal similarities are also great with the Keynesian multiplier model for income determination."

In diesem Sinne läßt sich sagen, daß Ansätze in der Richtung von Smith zu "mechanistisch" sind[1].

Wir werden uns daher zunächst nicht weiter mit ihnen befassen, sondern auf die mikrotheoretischen Aspekte eingehen. Im letzten Abschnitt der Arbeit werden die oben aufgeworfenen Fragen allerdings erneut behandelt.

III. Zur Entscheidung bei Risiko

4. Die Erklärung gemischter Portefeuilles

Im folgenden soll untersucht werden, von welchen Parametern die Investitionsentscheidungen der Financial Intermediaries abhängen.

A priori ist nicht zu erkennen, daß sie grundsätzlich anderer Natur sein sollten als die sonstiger Wirtschaftseinheiten. Die zugrunde gelegten Entscheidungskriterien gelten daher keineswegs speziell für Financial Intermediaries. Aus Gründen der Realitätsnähe werden jedoch solche Kriterien ausgeschlossen, die nicht in der Lage sind, gemischte Portefeuilles zu erklären[2].

Wird eine Welt der Sicherheit unterstellt, so sind besondere Annahmen erforderlich, um beispielsweise zu begründen, warum eine Bank nicht ausschließlich dasjenige Papier mit der höchsten Verzinsung hält.

Geht man etwa von der Kapitalwertmethode aus, so wird diejenige Anlagemöglichkeit gewählt, deren Kapitalwert bezo-

---

1) Vgl. auch R.A. Shearer [95], S.485.

2) Vgl. H. Markowitz [64], S.353-54.

gen auf den Zeitpunkt unmittelbar vor Beginn der Investition am größten ist[1]. Zumeist wird das nur eine sein.

Unterliegt die Entscheidung außer der Nichtnegativitätsbedingung ein oder mehreren Restriktionen, so bietet sich für die Ermittlung des optimalen "Kapitalbudgets" die Aufstellung eines linearen oder nichtlinearen Programms an[2]. Wir wollen auf die Einzelheiten solcher Programme verzichten, jedoch folgendes Ergebnis beachten:

Im Optimum eines linearen Programms wird von nicht mehr Investitionsmöglichkeiten Gebrauch gemacht, als Nebenbedingungen vorhanden sind[3].

Im optimalen Kapitalbudget nichtlinearer Programme besteht im allgemeinen keine eindeutige Zuordnung zwischen der Zahl der genutzten Investitionsmöglichkeiten und der Zahl der Nebenbedingungen[4].

---

1) Vgl. F.A. and V. Lutz [60], S.16 ff.; E. Schneider [101], S.43.

2) Vgl. H. Albach [2], H. Hax [39] und H.M. Weingartner [113] sowie die dort jeweils angegebene umfangreiche Literatur.

3) Siehe z.B. S.I. Gass [33], S.45 ff., insbesondere S.50 und S.59.

4) Ein nichtlineares Programm liegt vor, wenn die Zielfunktion und/oder die Nebenbedingungen bzw. ein Teil von ihnen nichtlinear sind. G. Hadley ([38], S.3) bezeichnet jedes Programm als nichtlinear, bei dem entweder die Zielfunktion nichtlinear ist, oder bei denen für die Variablen mehr Restriktionen vorliegen als lineare Nebenbedingungen und die Forderung der Nichtnegativität. So nennt er beispielsweise auch ein Programm, in dem Grenzzahligkeit verlangt wird, nichtlinear. H.P. Künzi und W. Krelle [52] andererseits definieren überhaupt nicht, was unter nichtlinearen Programmen verstanden wird. Die angegebenen Beispiele und Verfahren behandeln jedoch jeweils Probleme, für die die obige Definition zutrifft.

Wir halten fest:
Ein gemischtes Portefeuille läßt sich auch unter der Annahme der Sicherheit als rational erklären. Im linearen Fall unterliegt die Zahl der Papiere innerhalb eines Portefeuilles einer Obergrenze - nämlich derjenigen, die durch die Zahl der Nebenbedingungen gegeben ist - im nichtlinearen Fall existiert eine solche Obergrenze i.a. nicht[1].

Gemischte Portefeuilles lassen sich aber besonders gut in einer Welt des Risikos begründen, und zwar gerade deshalb, weil das Problem in diesem Fall auf ein konvexes Programm zurückgeführt werden kann. Da auch in der Realität bei der Aufteilung eines gegebenen Betrages auf mehrere Anlagemöglichkeiten der Sicherheitsgedanke dominieren dürfte, werden wir uns im folgenden auf die Entscheidung bei Risiko beschränken.

5. Über den Zusammenhang der Entscheidungskriterien bei Sicherheit und Risiko

Einem Investor stehe ein Betrag von DM M_1 zur Verfügung. Er kann aus n verschiedenen Anlagemöglichkeiten bestimmte Kombinationen $y' = [y_1,\dots,y_n]$ auswählen, wobei y_i die Menge der vom i-ten Objekt erworbenen Einheiten angibt. Es soll gelten

$$y' \geq 0 \quad \text{und} \quad y' q_1 = M_1 \quad , \quad \text{wenn mit}$$

$q_1 = [q_{11},\dots,q_{n1}]$ der zugehörige Vektor der heutigen Preise von y bezeichnet wird.

$q_2' = [q_{12},\dots,q_{n2}]$ sei der Preisvektor nach Ablauf einer

---

1) In einem gewissen Gegensatz hierzu scheint folgende Feststellung von H.M. Markowitz ([65], S.207) zu stehen: "..., if we consider diversification a sound principle of investment, we must reject the objective of simply maximizing expected return." Der Entscheidung unter Sicherheit entspricht ja völlig eine Entscheidung, bei der zwar das Risiko gesehen, jedoch nur der Erwartungswert der jeweiligen Verteilung beachtet wird.

Periode einschließlich der Zinsen, kurz der morgige Preisvektor. Es wird angenommen, daß die q_{i2} (i=1,...,n) nicht mit Sicherheit erwartet werden, sondern daß sie einer Verteilungsfunktion unterliegen.

$\eta' \eta_2 = M_2^Z$ ist dann der Wert des Portefeuilles morgen. Die für M_2^Z geltende Verteilungsfunktion hängt i.a. von η ab.

Wird mit K die Menge aller η bezeichnet, für die $\eta \geq 0$ und $\eta' \eta_1 = M_1$ gilt, und mit W die Menge aller Wahrscheinlichkeitsverteilungen, so läßt sich das Entscheidungsproblem des Investors wie folgt charakterisieren:[1)]

Es kann ein beliebiges $\eta \in K$ ausgewählt werden. Jedem η ist jedoch eindeutig ein $\mathfrak{M} \in W$ zugeordnet. Nennen wir diese Zuordnung (bzw. Abbildung) ϕ_1, so gilt daher:

$$K \ni \eta \quad \xrightarrow{\phi_1} \quad \phi_1(\eta) = \mathfrak{M} \in W$$

Die Aktion "Wähle $\eta \in K$" ist so zu treffen, daß das Ergebnis $\phi_1(\eta)$ optimal erscheint.

Freilich ist hier noch nicht gesagt, was optimal heißt. Die Situation ist offenbar wesentlich komplexer als bei einer Entscheidung unter Sicherheit. Aus Vergleichsgründen, und um Anhaltspunkte für das weitere Vorgehen zu gewinnen, wollen wir das Problem bei Sicherheit in analoger Weise skizzieren.

Hier wird angenommen, daß jede Wahl von $\eta \in K$ zu einem bestimmten Wert des Portefeuilles nach einer Periode führt. Diskontiert man diesen und subtrahiert M_1, so läßt sich auch sagen, daß jedem $\eta \in K$ ein eindeutiger Gegenwartswert des Gewinnes zugeordnet werden kann. Es liegt demnach die folgende Abbildung ϕ_2 vor

$$K \ni \eta \quad \xrightarrow{\phi_2} \quad \phi_2(\eta) = G \in R \ ,$$

wobei R für die Menge der reellen Zahlen steht.

---

1) Vgl. hierzu H. Schneeweiß [98], S. 32 f.

Die Problematik der Investitionsentscheidung ist hier einfacher. Im wesentlichen werden die folgenden Fragen auftauchen:

a. Wie sieht die Funktion ϕ_2 im konkreten Fall aus, d.h. welches ist die y zuzuordnende Größe M_2^z, und welcher Kalkulationszinsfuß ist zu verwenden[1)]?

b. Wie ist das globale Maximum von $\phi_2(y)$ rechnerisch zu bestimmen, insbesondere dann, wenn y wegen weiterer Restriktionen nur aus einer Teilmenge von K gewählt werden darf?

Es wird jedoch n i c h t die Frage gestellt, ob diejenige Kombination y zu wählen ist, die zu einem maximalen G führt oder eine andere[2)].

Was bedeutet dies? Doch offensichtlich, daß für G ein Präferenzfunktional[3)] ψ_2 mit folgender Eigenschaft zugrunde gelegt wird:

$$G_i > G_j \;\dot{\leftrightarrow}\; \psi_2(G_i) > \psi_2(G_j)$$ [4)]

Wir können somit den Unterschied in der Entscheidungssituation bei Sicherheit und Unsicherheit im nachstehenden Satz zusammenfassen:

---

1) Bei der Frage nach dem geeigneten Kalkulationszinsfuß, d.h. nach den Opportunitätskosten, handelt es sich primär um die vollständige Erfassung der gegebenen Alternativen; vgl. G. Franke und H. Laux [29].

2) Man kann natürlich auch an andere Zielsetzungen denken wie die Maximierung eines bestimmten Endwertes oder - sofern mehrere Perioden zugrunde gelegt werden - die Maximierung der Entnahme bei Konstanz der übrigen Grössen. Diese Zielsetzungen können jedoch leicht aufeinander zurückgeführt werden, wie G. Franke und H. Laux ([30]) gezeigt haben.

3) Vgl. zu diesem Begriff H. Schneeweiß [98], S.36.

4) Es handelt sich um den Spezialfall, in dem diejenigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen w, denen ψ_2 eine reelle Zahl zuordnet, entartet sind. Sie lassen die Gewinne G_i bzw. G_j mit der Wahrscheinlichkeit 1, alle anderen Werte jedoch jeweils mit der Wahrscheinlichkeit 0 eintreten. Am einfachsten wählt man hier für ψ_2 die Identität.

Bei Sicherheit ist jedem $\eta \in K$ ein Element G aus einer Menge R zugeordnet, für die eine Präferenzordnung ψ_2 besteht. Bei Unsicherheit entspricht jedem $\eta \in K$ ein Element μ aus einer Menge W, für die eine solche Präferenzordnung nicht ohne weiteres existiert. Indes läßt sich eine Präferenzvorschrift im ersten Fall nur deshalb sofort angeben, weil man meist bereit ist, die Aussage

$$G_1 > G_j \quad \rightleftarrows \quad \psi_2(G_1) > \psi_2(G_j)$$

als rational anzuerkennen. Hierbei handelt es sich allerdings um den Ansatz zu einer ganz bestimmten Interpretation der Rationalität - und zwar um den enumerativen oder axiomatischen Ansatz[1]. Die oben erwähnte Aussage über G_1 bzw. G_j ist bereits ein erstes Axiom.

Wenn es bei Sicherheit also möglich war, bereits aus diesem einen Axiom ein Präferenzfunktional ψ_2 über G zu gewinnen, das eine Aussage über die zu wählende Kombination η erlaubte, so können wir fragen:

Ist es möglich, unter Hinzunahme weiterer ("rationaler") Axiome auch ein Präferenzfunktional ψ_1 über der Menge W der Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu finden, so daß sich dort gleichfalls eine optimale Entscheidung angeben läßt (nämlich diejenige, die $\psi_1 [\mu(\eta)]$ maximiert)?

In der Tat ist dies der Weg, den die Entscheidungstheorie gegangen ist, und den wir im folgenden kurz beschreiben wollen.

6. Zur Axiomatik des Bernoulli-Nutzens

Die Zahl der Axiomensysteme, die hinreichend und/oder notwendig sind, das Bernoulli-Prinzip[2] zu begründen, ist recht groß[3].

---

1) Vgl. H. Schneeweiß [98], S. 77.

2) Nach diesem Prinzip ist das Präferenzfunktional über der Menge W gleich dem erwarteten Nutzen; vgl. Schneeweiß [98], S. 61.

3) Vgl. R.D. Luce and H. Raiffa [59], S.23 ff., H.M. Markowitz [65], S. 229 ff., J.V. Neumann u. O. Morgenstern [71] S.26 ff., J. Pfanzagl [72] und die dort angegebene Literatur.

Eine solche Aussage beinhaltet allerdings bereits, daß diese Systeme im wesentlichen äquivalent sind und sich mehr oder weniger leicht aufeinander zurückführen lassen. Die Wahl der tatsächlich zugrunde gelegten Axiome läßt sich nicht weiter zwingend begründen. Es handelt sich um eine Entscheidung darüber, wie stark man die Forderungen nach

geringer Zahl der Axiome,
Übersichtlichkeit der Herleitung aus ihnen und
unmittelbarer Plausibilität

zu gewichten bereit ist.

Wir werden auf die Fragen der "komparativen Axiomatik"[1] nicht eingehen und im wesentlichen das System von Markowitz[2] zugrunde legen.

Es sei $\mathcal{M}_i \in W$; $i=1,\ldots,m$, wobei

$$\mathcal{M}_i = [M_{12},\ldots,M_{j2},\ldots,M_{n2};w_{1i},\ldots,w_{ji},\ldots,w_{ni}]$$

diejenige Verteilung angibt, die mit der Wahrscheinlichkeit w_{ji} den Wert M_{j2} für das Portefeuille nach einer Periode eintreten läßt [3].

Es gilt $0 \leq w_{ji} \leq 1$ $\quad i=1,\ldots,m$ und $j=1,\ldots,n$

$$\sum_{j=1}^{n} w_{ji} = 1 \quad .$$

Unter $\mathcal{M}_z = [\mathcal{M}_1,\ldots,\mathcal{M}_1,\ldots,\mathcal{M}_m;w_{1z},\ldots,w_{iz},\ldots,w_{mz}]$

mit $0 \leq w_{iz} \leq 1$; $i=1,\ldots,m$ und $\sum_{i=1}^{m} w_{iz} = 1$

soll diejenige zusammengesetzte Wahrscheinlichkeitsverteilung verstanden werden, die mit der Wahrscheinlichkeit w_{iz} die Verteilung $\mathcal{M}_i$ liefert.

---

1) Vgl. H.M. Markowitz [65], S.234.

2) Siehe Fußnote 3) auf S.22.

3) zur Symbolik vgl. P.A. Samuelson[88], S.132.

Schließlich wird $\mathcal{M}_z^v$ die mit $\mathcal{M}_z$ v e r b u n d e n e Verteilung genannt, wobei

$$\mathcal{M}_z^v = [M_{12},\ldots,M_{n2};w_{1z}^v,\ldots,w_{nz}^v]$$

$$= [M_{12},\ldots,M_{n2};\sum_{i=1}^{m} w_{1i}w_{iz},\ldots,\sum_{i=1}^{m} w_{ni}w_{iz}]$$

$\mathcal{M}_z^v$ geht also einfach dadurch aus $\mathcal{M}_z$ hervor, daß die zu M_{j2} (j=1,...,n) gehörende Wahrscheinlichkeit in $\mathcal{M}_z$ mit Hilfe des Additions- und Multiplikationssatzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung explizit angegeben wird, und zwar als

$$\sum_{i=1}^{m} w_{ji}w_{iz} \quad .$$

Insoweit handelt es sich nur um eine rechnerische Umformung. Bei der Bewertung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen ist indes nicht ohne weiteres gesagt, daß ein solcher Übergang keinen Einfluß hat. Doch wird dies durch das folgende Axiom gewährleistet[1].

Axiom I: Es sei $\mathcal{M}_z$ irgendeine Verteilung aus W und $\mathcal{M}_z^v$ die mit ihr verbundene Verteilung. Dann gilt $\mathcal{M}_z \sim \mathcal{M}_z^v$.

Mit dieser "Grundannahme"[2] wird postuliert, daß nur die Verteilung selbst, nicht die Art ihres Zustandekommens für die Bewertung entscheidend ist. Man kann dies verschieden interpretieren:
Entweder als die Hypothese, daß die Freude am "Spiel" ausgeschlossen sein soll[3], oder daß das Problem falsch

---

1) Vgl. H.M. Markowitz [65], S.229; P.A. Samuelson [88], S.132 und H. Schneeweiß [98], S.33.
$\mathcal{M}_i \succsim \mathcal{M}_j$ ist gleichbedeutend mit: $\mathcal{M}_i$ wird mindestens genauso hoch eingeschätzt wie $\mathcal{M}_j$
$\mathcal{M}_i \precsim \mathcal{M}_j$ " " $\mathcal{M}_j$ " " $\mathcal{M}_i$
$\mathcal{M}_i \sim \mathcal{M}_j$ " " $\mathcal{M}_i \succsim \mathcal{M}_j$ und $\mathcal{M}_i \precsim \mathcal{M}_j$

2) H. Schneeweiß [98], S.33

3) so P.A. Samuelson [88], S.133

formuliert ist[1]. Die richtige Formulierung müßte dann das Spiel an sich als Ergebnis vorsehen und eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auch danach bewerten, inwieweit sie dieses Ergebnis enthält - gleichgültig, in welcher Form sie sich rein rechnerisch repräsentiert.

Axiom II:[2] Wenn W_i und W_j beliebige Elemente aus W sind, so gilt entweder $W_i \succsim W_j$ oder $W_j \succsim W_i$ oder beides. Aus $W_i \succsim W_k$ und $W_k \succsim W_j$ folgt $W_i \succsim W_j$.

Es wird also für die Präferenzordnung über W die gleiche Annahme gemacht wie für die Präferenzordnung über der Menge der Gütervektoren in der nichtstochastischen Nutzentheorie[3].

Axiom III: Wenn $W_i \succ W_j$, so gilt für jedes $W_k \in W$ und jedes p mit $0 \leq p \leq 1$

$$p\,W_i + (1-p)W_k \succ p\,W_j + (1-p)W_k .$$

Es handelt sich hier um die Forderung nach Unabhängigkeit der Bewertung zweier Verteilungen von einem Ereignis, das in beiden Verteilungen mit gleicher Wahrscheinlichkeit eintritt.

So plausibel diese Forderung erscheinen mag - sie hat in der Diskussion um das Bernoullikriterium eine wesentliche Rolle gespielt, und zwar aus folgenden Gründen: zum einen enthält das Axiomensystem von Neumann-Morgenstern[4] nicht direkt ein entsprechendes Postulat, zum anderen hat Axiom III im Bereich der nichtstochastischen Nutzentheorie sein Äquivalent in der Bedingung, daß die partiellen Ableitungen der Nutzenfunktion nach bestimmten Gütern unabhängig von der Höhe anderer Güter sind, was als eine zu starke

---

1) so H. Schneeweiß [98], S.33.

2) Abgesehen von der Symbolik handelt es sich bei diesem Axiom und den beiden folgenden um fast wörtliche Wiedergaben aus H.M. Markowitz [65], S.236.

3) Vgl. G. Debreu [22], S.55.

4) Vgl. Fußnote 3) auf S.22.

Einschränkung gegenüber der Realität erschien[1].
Schließlich gilt

Axiom IV: Wenn $\mathfrak{W}_i \succsim \mathfrak{W}_k \succsim \mathfrak{W}_j$, so gibt es ein p mit $0 \leq p \leq 1$ und $p\mathfrak{W}_i + (1-p)\mathfrak{W}_j \sim \mathfrak{W}_k$.

Dies ist die übliche Stetigkeitsannahme[2].

---

1) Vgl. P.A. Samuelson [87], S.124 ff. und [86], S.174 ff. Die Darstellung des Unabhängigkeitsaxioms in [87], S.124 entspricht der hier gebrachten. Dort liegt folgende Situation zugrunde: wenn $w_i \sim w_j$ folgt $pw_i + (1-p)w_j \sim w_i \sim w_j$ mit $0 \leq p \leq 1$; daraus läßt sich jedoch leicht ableiten, daß dann auch aus $w_i \succ w_j$ mit beliebigem $w_k \in W$ folgt: $pw_i + (1-p)w_k \succ pw_j + (1-p)w_k$. Wir nehmen an, aus $w_i \succ w_j$ würde $pw_i + (1-p)w_k \sim pw_j + (1-p)w_k$ folgen. Da w_k beliebig, also auch gleich w_i gewählt werden kann, ergibt sich für p=1: $w_i \sim w_j$, im Widerspruch zu obiger Annahme.

   Eine gleiche Überlegung führt die Annahme "aus $w_i \succ w_j$ folgt $pw_i + (1-p)w_k \prec pw_j + (1-p)w_k$" zum Widerspruch. Folglich muß die in Axiom III angegebene Formulierung des Unabhängigkeitsaxioms gelten.
   Übrigens konnte Markowitz ([65], S.209) später auf Samuelson anspielend schreiben: "At least two wellknown economists who first wrote as opponents later became adherents of the expected utility maxim. The writer knows of no equally famous conversion in the other direction."

2) G. Debreu [22], S.57 erhält im Rahmen seines Axiomensystems für den nichtstochastischen Fall eine äquivalente Aussage als Ergebnis.
   P.C. Fishburn äußert sich sehr kritisch zu der Annahme, es gebe ein eindeutig bestimmtes p mit der geforderten Eigenschaft. Er hält sie für "Wunschdenken" ([27], S. 124). In der Regel wird ein Individuum nur angeben können, daß das p des Axioms IV innerhalb eines abgeschlossenen Intervalls liegt. Indem er an Aussagen anknüpft, die dieses Individuum über solche Intervalle macht, gelingt es Fishburn, eine ganze Hierarchie von Meßkonzepten für den "Nutzen" einer Aktion anzugeben. Die kardinale Meßbarkeit ist hier nur ein Grenzfall. Es ist klar, daß ein Verzicht auf die Eindeutigkeit von p tendenziell die Hoffnung verringern muß, in spezifischen Risikosituationen eindeutig sagen zu können, welche Aktion zu wählen ist (vgl. [27], S.78). Bezeichnet man als rational ein Verhalten, bei dem die Axiome I-IV erfüllt sind, so werden sich die vielen beobachteten Fälle nicht-rationaler Entscheidung zum Teil also schon damit erklären lassen, daß die Fassung von Axiom IV sehr eng ist.

Mit Hilfe von Axiom I-IV läßt sich der folgende grundlegende Satz herleiten[1] .

Satz: Es gibt eine Funktion U über M_2, so daß $m_1 \succ m_k$

$$\text{genau dann, wenn } \sum_{j=1}^{n} w_{j1} U(M_{j2}) > \sum_{j=1}^{n} w_{jk} U(M_{j2}) \ .$$

Dies ist der Inhalt des Bernoulli-Prinzips. Die Funktion U ist hierin bis auf eine lineare Transformation eindeutig bestimmt, d.h. für zwei Funktionen U_1 und U_2 gibt es Konstante a und b, so daß $U_2 = a+bU_1$.

Wir können demnach sagen: Ein Wirtschaftssubjekt, für das die Axiome I bis IV erfüllt sind, handelt dann in Übereinstimmung mit seiner Präferenzordnung, wenn es so handelt, a l s o b es den Erwartungswert einer Funktion maximiert hätte, die bis auf eine lineare Transformation eindeutig bestimmt ist. Sie wird üblicherweise Nutzenfunktion genannt.
Der angeführte Satz liefert allerdings nicht nur eine Existenzaussage über die Nutzenfunktion. Er gibt zugleich mit den Axiomen einen Anhaltspunkt dafür, diese Funktion mit Hilfe einfacher Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu messen[2]. Es soll hier nicht weiter darauf eingegangen, sondern nur der Grundgedanke angedeutet werden.

Ein Individuum werde vor die Alternative gestellt, zwischen folgenden Situationen wählen zu müssen:

a. Es erhält mit einer Wahrscheinlichkeit p den Wert M_{12} und mit einer Wahrscheinlichkeit 1-p den Wert $M_{32} > M_{12}$.

b. Es erhält den sicheren Wert M_{22} mit $M_{12} < M_{22} < M_{32}$.

---

1) Vgl. R.D. Luce and H. Raiffa [59], S.29; H.M. Markowitz [65], S.242; J. v. Neumann u. O. Morgenstern [71], S.26-27 und Anhang; P.A. Samuelson [88], S.134 f.; H. Schneeweiß [98], S.76; H. Theil [106], S.25.

2) Vgl. H. Schneeweiß [98], S.67 ff.; R.D. Luce and H. Raiffa [59], S.35 ff.; Experimentelle Untersuchungen wurden u.a. von P. Mosteller and P. Nogee [70] angestellt. Zu den hierbei auftauchenden Schwierigkeiten siehe P.C. Fishburn [27], S.82 ff.

Man verändert nun die Wahrscheinlichkeit p so lange, bis die beiden Situationen als indifferent angesehen werden (nach Axiom IV gibt es ein $p=p_o$ mit dieser Eigenschaft). Der obige Satz garantiert die Existenz von Zahlen $U(M_{12})$ $(i=1,2,3)$ mit

$$[M_{12},M_{32};p_o,1-p_o] \sim [M_{22};1] \text{ genau dann, wenn}$$

$$U(M_{12})p_o+U(M_{32})(1-p_o) = U(M_{22}) \quad .$$

Da die Zahlen $U(M_{12})$ $(i=1,2,3)$ nur bis auf eine lineare Transformation eindeutig bestimmt sind, ist es möglich, zwei Werte von ihnen beliebig festzulegen.

Geschieht das z.B. in der Form

$$U(M_{12}) = 0 \text{ und } U(M_{32}) = 1 \text{ , so folgt}$$

$$0p_o+1(1-p_o) = U(M_{22}), \text{ d.h. } U(M_{22}) = 1-p_o \quad .$$

Diejenige Wahrscheinlichkeit, mit der M_{32} eintreten muß, damit die beiden Alternativen als gleichwertig empfunden werden, gibt also einen Index für die Einschätzung von M_{22} an - anders ausgedrückt: den Wert der Nutzenfunktion U an der Stelle M_{22}. Im Prinzip lassen sich auf diese Weise sämtliche Werte der Nutzenfunktion U über M_2 bestimmen.

Es ist wichtig, sich über die positive und normative Bedeutung des Bernoulli-Prinzips klar zu werden.

Das Bernoulli-Prinzip liefert eine positive Theorie des Verhaltens all derer, die in Übereinstimmung mit den Axiomen I bis IV handeln. Erkennt man diese Axiome als rational[1)] an, so läßt sich sagen, daß eine Möglichkeit gefunden ist, positiv das Verhalten r a t i o n a l e r Individuen zu beschreiben. Diese Beschreibungsmöglichkeit ist nicht ohne Bedeutung, da die Nutzenfunktionen gemessen werden können. Bewußt wurde das Bernoulli-Prinzip als

---

1) Vgl. L.J. Savage [90], S.19 ff. und S.99 ff. und H. Schneeweiß [98], S.77 f.

positive Theorie auf das Verhalten rationaler Individuen im Sinne der Axiome I-IV eingeschränkt. Es ist nur eine Hypothese für das Verhalten aller Individuen. Es wurden zahlreiche Fälle beobachtet, in denen die befragten Personen ihre Entscheidungen nicht in Übereinstimmung mit den Axiomen I-IV trafen. So hat insbesondere Allais[1] mehrere Tests konstruiert, die darauf hindeuten, daß z.B. die Präferenzordnung der untersuchten Personen nicht transitiv ist. Entsprechend lassen sich Situationen denken, in denen das Stetigkeitsaxiom verletzt wird, oder es gibt "Paradoxa", die darauf hinweisen, daß zumindest nicht alle Axiome gleichzeitig erfüllt sein können. Marschak[2] etwa nennt das Beispiel des Bergsteigers, der eine 95prozentige Überlebenschance einer 80prozentigen vorzieht, aber gleichfalls einer solchen von 100 Prozent, die beispielsweise dann gegeben ist, wenn er daheim bleibt. Daneben sind all diejenigen Fälle zu nennen, in denen sich mehr oder weniger versteckt die Freude an der Risikosituation per se manifestiert (das Beispiel Marschaks gehört letztlich auch zu dieser Gruppe)[3].

Es läßt sich nicht sagen, daß solche 'Widersprüche' bereits genügten, die Bernoulli-Hypothese als positive Theorie gänzlich zu verwerfen. Insbesondere dann nicht, wenn man sie als Annäherung an das wirkliche Verhalten einer ganzen Gruppe von Wirtschaftssubjekten auffaßt. Es ließe sich bei einer solchen vorsichtigeren (positiven) Formulierung die Möglichkeit berücksichtigen, daß ein gewisses Abweichen vom "Normalfall" zu beobachten ist. Denn daß eine Nichtbeachtung der Axiome I-IV geradezu die Regel darstellte, - und daß dann die Bernoulli-Hypothese auf jeden Fall verworfen werden müßte - ist bis heute nicht nachgewiesen worden. Es gilt wohl hier gene-

---

1) A. Allais [3a]; vgl. auch H.M. Markowitz [64], S.218 ff. und H. Schneeweiß [98], S.79 f.

2) J. Marschak [66], S.138.

3) Vgl. auch die Bemerkungen zu Axiom I auf S.24 oben.

rell, was Marschak für den speziellen Fall des Bergsteigers wie folgt formuliert[1]:

> "If,..., rational behavior is used as a approximation hypothesis for the study of actual behavior,..., love of danger may be considered as a departure from rationality. It is then a matter of empirical psychology and is important to economics in the same way in which inconsistency (intransitivity) of preferences, inability to measure, to imagine, to remember, are important. We treat it in the same way that we treat the fact that people make mistakes of arithmetic and infringe upon the rules of conventional logic."

Daß die Bernoulli-Hypothese keine a l l e i n ausreichende positive Theorie darstellt, führt Savage per Analogie deutlich vor Augen, indem er schreibt[2]:

> "..., if anyone who believed the axioms of mathematics also believed all that they imply and nothing that they contradict, mathematical study would be superfluous for him;"

Sicher liegt gerade hier ein Ansatzpunkt für experimentelle Verhaltensforschung.

Ganz allgemein ist in der Literatur die Einschätzung des positiven Gehalts der Bernoulli-Hypothese unterschiedlich.

Samuelson[3] äußert sich sehr skeptisch:

> "From the standpoint of explaining a c t u a l b e h a v i o r (im Original Kursivschrift) of men on this planet, the Bernoulli utility hypothesis appears to me to be of rather trifling significance. Even since I have become sympathetic toward the theory, I have not been able to find any confirmation of the theory's aspects that are special and (therefore) interesting."

Manne[4] zielt in die gleiche Richtung:

> "The supporters of Bernoulli-von Neumann cardinal utility can only take cold comfort from their newly won convert, Professor Samuelson. From him, we finally learn that this is a problem in applied aesthetics."

---

1) J. Marschak [66], S.139 f.

2) L.J. Savage [90], S.20; vgl. hierzu auch H. Schneeweiß [98], S.77 ff.

3) P.A. Samuelson [88], S.128.

4) A.S. Manne [63], S.668.

Vielfach wird es plausibel sein anzunehmen, daß ein Individuum die Axiome I-IV zwar prinzipiell anerkennt, daß es sich aber doch in komplexeren Situationen nicht an die durch diese Axiome nunmehr rein logisch implizierten Entscheidungen hält. Man muß bedenken, daß es eines unter Umständen erheblichen Rechenaufwandes bedarf, um diese implizierten Entscheidungen explizit anzugeben. Beschränkte Rechenkapazitäten können also allein schon ein Abweichen vom Bernoulli-Prinzip bewirken[1].

Soweit das der Fall ist, genügt die Bernoulli-Hypothese als positiver Erklärungsversuch wirtschaftlicher Entscheidungen in der Tat nicht[2].

Dies ist aber genau der Punkt, wo der normative Gehalt des Bernoulli-Prinzips interessant wird. Tatsächlich sehen auch die meisten Autoren darin seine besondere Bedeutung[3].

---

1) Vgl. R. Radner [77].

2) Vgl. hierzu aber auch die optimistischere Beurteilung von L.J. Savage [90], S.101 und den folgenden Passus von J.v. Neumann u. O. Morgenstern [71], S.20. "Es könnte der Einwand erhoben werden, daß es nicht nötig sei, bei der Betrachtung über die Meßbarkeit des Nutzens in zu verwickelte Details zu gehen, da der Durchschnittsmensch, dessen Verhalten man beschreiben möchte, seinen Nutzen nicht genau messe, sondern sein wirtschaftliches Handeln mehr aus sehr unklaren Motiven herleite. Dasselbe gilt natürlich oft für sein Verhalten gegenüber Licht, Wärme, Muskelkraft usw. Um aber eine physikalische Wissenschaft aufzubauen, mußten diese Erscheinungen gemessen werden. Und später gebrauchte das Individuum die Ergebnisse dieser Messungen bald direkt, bald indirekt in seinem alltäglichen Leben. Dasselbe könnte eines Tages in der Ökonomie geschehen."

3) so J. Pfanzagl [72], S.249 und L.J. Savage [90], S.20, 59,97; R.D. Luce and H. Raiffa [59] sprechen zwar nicht explizit von einer normativen Theorie, doch läuft ihre Interpretation eindeutig in diese Richtung; ähnlich Marschak [66], S.112, der ein Verhalten nach Axiomen, die den hier angeführten im wesentlichen gleichen, als rational ansieht und damit das Bernoulli-Prinzip normativ auffaßt; ebenso H. Schneeweiß [98], S.73 ff., insbesondere S.77 f.. Hingegen mißt P.A. Samuelson ([88], S.128 ff.) auch dem normativen Gehalt des Bernoulli-Prinzips keine besondere Bedeutung zu.

Ein Individuum wird in der Regel zwischen den einfachen (bereits auf S. 27 beschriebenen) Alternativen wählen können. Ist dieses Individuum zusätzlich bereit, die Axiome I bis IV anzuerkennen, dann gibt ihm das Bernoulli-Prinzip eine klare Richtschnur in die Hand, wie es sich in komplexeren Risikosituationen zu verhalten hat. Es muß sich dann einfach so entscheiden, als maximiere es den Erwartungswert einer Funktion, die sich bereits aus seiner Wahl bei den oben erwähnten einfachen Risikosituationen herleiten läßt. In diesem Sinn kann man sagen, das Bernoulli-Prinzip liefere einen Maßstab für konsistentes Verhalten. Sein normativer Charakter wird damit offenbar. Normativ allerdings nur insoweit, als man bereit ist, die Axiome I bis IV als Norm zu billigen.

Es wurde bereits erwähnt, daß viele Fälle beobachtet wurden, wo das tatsächliche Verhalten nicht im genannten Sinne konsistent war. Allerdings schließt dies nicht aus, daß das betreffende Individuum bereit ist, seine Entscheidung zu revidieren, wenn es auf die Inkonsistenz aufmerksam gemacht wird[1].

Erkennt ein Individuum die Axiome I bis IV an, so hat es einfach einen "Rechenfehler" gemacht, wenn seine Entscheidung nicht mit der nach dem Bernoulli-Prinzip zu treffenden übereinstimmt. Die Beurteilung einer Risikosituation nach dem erwarteten Nutzen der einzelnen Alternativen ist die einfachste Methode, Rechenfehler solcher Art zu vermeiden. Der erwartete Nutzen kann daher bei Vorliegen von Risiko am geeignetsten unmittelbar zur Entscheidung herangezogen werden[2].

Im weiteren Verlauf der Arbeit gehen wir daher vom Bernoulli-Prinzip aus, wobei zur Abgrenzung von der nichtstochastischen Nutzentheorie folgendes besonders festgehalten werden soll:

---

1) Vgl. H.M. Markowitz [65], S.219 ff. und H. Schneeweiß [98], S.79.

2) Vgl. R.D. Luce and H. Raiffa [59], S. 23 f.

a. Die Funktion, deren Erwartungswert maximiert wird, ist kardinal meßbar[1].

b. Sie "ist nicht notwendig identisch mit dem psychologischen Nutzen, dem Grad subjektiver Befriedigung"[2]. Dies wird deutlich, wenn man ihre Herleitung beachtet. Es wurde in der in Fußnote 1) auf S. 27 angegebenen Literatur als mathematische Aussage bewiesen, daß bei Erfüllung der Axiome I bis IV eine Funktion existiert, die die Präferenz zwischen verschiedenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen wiedergibt. Diese Funktion wurde Nutzenfunktion genannt, ihre Werte Bernoulli-Nutzen. Wesentlich bei der Herleitung dieser Funktion ist also, daß eine Risikosituation zugrunde liegt. Nur so konnte auch ihr numerischer Wert ermittelt werden. Losgelöst von der Entscheidung bei Risiko kann über sie nichts ausgesagt werden. Daher fehlt ohne weitere Untersuchungen zunächst auch jede Vergleichsbasis zwischen dem Bernoulli-Nutzen und dem psychologischen Nutzen einer nichtstochastischen Situation, über dessen kardinale Meßbarkeit begründete Zweifel bestehen[3].

c. Aus der Art der Herleitung des Bernoulli-Prinzips wird deutlich, daß es sich nicht um eine sehr vereinfachte Theo-

---

1) Es war diese kardinale Eigenschaft, die Samuelson zunächst davon abhielt, das Bernoulli-Prinzip als rational anzuerkennen, denn die üblichen Nutzenfunktionen im nichtstochastischen Bereich sind nur bis auf eine monotone Transformation bestimmt (vgl. z.B. J.R. Hicks [42], S.3o6 f.). Will man auch hier die kardinale Meßbarkeit begründen, so geschieht dies in der Regel dadurch, daß man für eine Nutzenfunktion $\phi = \phi(x,y)$ über x und y die additive Zerlegbarkeit fordert, d.h. $\phi = \phi_1(x)+\phi_2(y)$. Es wird also ein Unabhängigkeitsaxiom postuliert (vgl. P.A. Samuelson [86], S. 174 ff.). In der Axiomatik von Neumann-Morgenstern ([71], S. 26) findet sich explizit keine derartige Forderung. Implizit wird sie jedoch auch dort benutzt, wie E. Malinvaud ([62]) gezeigt hat; sie entspricht dem oben angegebenen Axiom III.

2) H. Schneeweiß [98], S. 7o

3) Es erscheint daher nicht glücklich, daß für beide Begriffe der gleiche Ausdruck verwendet wird. Siehe hierzu W. Krelle [51], S. 139 ff. und L.J. Savage [9o], S. 98.

rie handelt, die bei Entscheidungen nur den Erwartungswert des Nutzens zugrunde legt, andere Momente aber außer acht läßt. Im Gegenteil, der Erwartungswert des Nutzens allein gibt bereits vollständig die Präferenzordnung über der Menge der Wahrscheinlichkeitsverteilungen wieder[1].

d. In gleicher Weise gilt nicht - wie der Name erwarteter Nutzen nahelegen könnte - daß diese Theorie nur dann von Bedeutung sei, wenn eine Entscheidung bei Ereignissen zu treffen ist, die sich häufig und unabhängig voneinander wiederholen. Von solchen Annahmen war bei dem angeführten Satz nicht die Rede. Die einzigen Voraussetzungen, die gemacht wurden, sind die Axiome I bis IV.

7. Die Ermittlung optimaler Portefeuilles

7.1. Die Slutsky-Gleichungen bei zwei Anlagemöglichkeiten

Wir wollen uns der Bestimmung eines optimalen Portefeuilles zuwenden, wenn nur 2 Anlagemöglichkeiten gegeben sind; sie werden der Kürze wegen Papiere genannt.

Es sei:

$U = U(M_2)$	eine Nutzenfunktion über dem Vermögen im Zeitpunkt 2 $(=M_2)$
E	der Erwartungswert einer Verteilung
q_{ij} $i,j=1,2$	der Preis des Papiers i im Zeitpunkt j (für j=2 einschließlich der Zinsen)
$q_{11} = 1$	
q_{12}	eine mit Sicherheit erwartete Größe
q_{22}	eine Zufallsvariable
M_1	der heute (im Zeitpunkt 1) für die Anlage in den beiden Papieren zur Verfügung stehende Betrag
$M_2^z = q_{12}y_1 + q_{22}y_2$	wobei y_1 (bzw. y_2) die von Papier 1 (bzw.2) erworbenen Mengen angibt M_2^z ist wegen der darin enthaltenen Größe q_{22} eine Zufallsvariable

Um den erwarteten Nutzen eines aus den beiden Papieren an-

---

1) Vgl. R.D. Luce and H. Raiffa [59], S.32.

gelegten Portefeuilles zu maximieren, wird der folgende Lagrangeansatz mit λ als Lagrangefaktor gebildet[1]:

$$(6) \qquad \Phi = E[U(q_{12}y_1+q_{22}y_2)] + \lambda(q_{11}y_1+q_{21}y_2-M_1)$$

Die notwendigen Bedingungen für ein Maximum von E[U] unter der angegebenen Restriktion lauten:

$$(7) \qquad \Phi_{y_1} = E[U'q_{12}] + \lambda q_{11} = 0$$

$$(8) \qquad \Phi_{y_2} = E[U'q_{22}] + \lambda q_{21} = 0$$

$$(9) \qquad \Phi_{\lambda} = q_{11}y_1 + q_{21}y_2 - M_1 = 0$$

Um die Abhängigkeit der Größen y_1 und y_2 von M_1 festzustellen, wird das System (7) - (9) nach M_1 differenziert:

$$\begin{bmatrix} E[U''q_{12}^2] & E[U''q_{12}q_{22}] & 1 \\ E[U''q_{12}q_{22}] & E[U''q_{22}^2] & q_{21} \\ 1 & q_{21} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dM_1} \\ \frac{dy_2}{dM_1} \\ \frac{d\lambda}{dM_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

so daß

$$(11) \qquad \frac{dy_1}{dM_1} = \frac{E[U''r_e q_{22}]}{E[U''r_e^2]} \qquad \text{und}$$

$$(12) \qquad \frac{dy_2}{dM_1} = -\frac{E[U''r_e q_{12}]}{E[U''r_e^2]} \qquad \text{mit}$$

$$(13) \qquad r_e = q_{22} - q_{12}q_{21}$$

Die hinreichende Bedingung für ein Maximum von $E[U(M_2)]$ ist erfüllt, wenn für die Determinante D der Koeffizientenmatrix aus (1o) gilt:

$$(14) \quad D = -E[U''r_e^2] > 0 \quad \text{d.h. wenn} \quad E[U''r_e^2] < 0$$

Solange $r_e \neq 0$, ist dies immer dann der Fall, wenn $U'' < 0$, d.h. für alle Funktionen U über M_2 mit

---

1) Vgl. K.J. Arrow [4], S. 38 f. Der dortige Ansatz ist jedoch teilweise spezieller.

abnehmendem Grenznutzen.

In entsprechender Weise ergibt sich für die Abhängigkeit der Größe y_1 und y_2 von q_{21} aus (7) - (9)

$$(15)\quad \begin{bmatrix} E[U''q_{12}^2] & E[U''q_{12}q_{22}] & 1 \\ E[U''q_{12}q_{22}] & E[U''q_{22}^2] & q_{21} \\ 1 & q_{21} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dq_{21}} \\ \frac{dy_2}{dq_{21}} \\ \frac{d\lambda}{dq_{21}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\lambda \\ -y_2 \end{bmatrix}$$

und nach Substitution von λ mit Hilfe von (7)

$$(16)\quad \frac{dy_1}{dq_{21}} = -\frac{E[U'q_{12}q_{21}]}{E[U''r_e^2]} - y_2 \frac{dy_1}{dM_1} \qquad \text{bzw.}$$

$$(17)\quad \frac{dy_2}{dq_{21}} = \frac{E[U'q_{12}]}{E[U''r_e^2]} - y_2 \frac{dy_2}{dM_1} \quad .$$

Dabei nehmen $\frac{dy_1}{dM_1}$ und $\frac{dy_2}{dM_1}$ die in (11) bzw. (12) ermittelten Werte an.

(16) und (17) sind die bekannten Slutsky-Gleichungen - hier auf die Bestimmung eines optimalen Portefeuilles bei Unsicherheit angewandt. Daß der jeweils erste Summand tatsächlich den Substitutionseffekt angibt, erkennt man aus der Frage: Wie ändert sich der optimale Anlageplan, wenn q_{21} und M_1 in solcher Weise geändert werden, daß gilt:

$$(18)\quad E[U(q_{12}y_1 + q_{22}y_2)] = \bar{E} \quad ? \qquad \bar{E} = \text{Konstante}$$

Differentiation von (18) nach q_{21} ergibt:

$$(19)\quad E[U'(q_{12}\frac{dy_1}{dq_{21}} + q_{22}\frac{dy_2}{dq_{21}})] = 0$$

Beachtet man wegen (7), (8) und der Voraussetzung $q_{11} = 1$, daß

(20) $E[U'q_{12}] = \frac{1}{q_{21}} E[U'q_{22}]$, so kann (19) wie folgt

(21) $1 \frac{dy_1}{dq_{21}} + q_{21} \frac{dy_2}{dq_{21}} = 0$

geschrieben werden, d.h. nach Substitution von (21) in (15) ändert sich der rechts stehende Lösungsvektor in

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -\lambda \\ 0 \end{bmatrix}$$

Somit bleibt in der Lösung (16) bzw. (17) tatsächlich nur noch der erste Summand erhalten.

Wenn die hinreichende Bedingung (14) erfüllt ist, und wenn wir sinnvollerweise $U' > 0$ annehmen, erkennt man, daß der Substitutionseffekt in (17) negativ, in (16) positiv ist (es ist nur zu beachten, daß q_{12} und q_{21} annahmegemäß positive Konstanten sind). Für ihn gelten also die gewohnten Vorzeichen. Für den "Einkommenseffekt"[1], d.h. für den zweiten Summanden aus (16) bzw. (17) lassen sich indessen - wie in der nichtstochastischen Haushaltstheorie auch - keine eindeutigen Vorzeichen angeben, es sei denn, man beschränkt die Menge der zugelassenen Nutzenfunktionen[2].

Freilich, so groß die Analogie zwischen den üblichen Slutsky-Gleichungen der Haushaltstheorie und den hier vorliegenden auch ist - im Falle der Entscheidung bei Risiko lassen sie sich nicht ohne weiteres auf mehr als zwei Wertpapiere erweitern. Während dort nur Restriktionen für die Nutzenfunktion vorgenommen werden mußten, um zu sichern, daß die hinreichenden Bedingungen für ein Maximum erfüllt sind, spielen für das hier relevante Konzept des erwarteten

---

1) Es handelt sich genauer um einen Vermögenseffekt (wealth-effect).

2) Eine solche Beschränkung liegt insbesondere dann vor, wenn man gleichzeitig bestimmte μ,σ-Prinzipien und das Bernoulli-Prinzip als rational ansieht.

Nutzens neben der Nutzenfunktion über M_2 eben auch die Verteilungen der q_{12} eine Rolle. Wer dennoch detailliertere Aussagen gewinnen will, ist gezwungen, entweder die Menge der zugelassenen Nutzenfunktionen und/oder die der Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu beschränken.

Eine erste Einschränkung für U haben wir oben bereits vorgenommen, indem wir forderten, daß $U' > 0$ und $U'' < 0$, d.h.

$$(22) \qquad R_A(M_2) = -\frac{U''(M_2)}{U'(M_2)} > 0$$

Der Anleger ist unter dieser Voraussetzung risikoscheu[1]. Arrow[2] schlug darüber hinausgehende Hypothesen vor. Die Art der Risikoaversion sei weiter einzuschränken und zwar derart, daß

$$(23) \qquad dR_A(M_2)/dM_2 < 0 \qquad \text{und}$$

$$(24) \qquad dR_R(M_2)/dM_2 > 0 \qquad \text{mit}$$

$$(25) \qquad R_R(M_2) = -U''(M_2)M_2/U'(M_2) \quad .$$

---

1) Zur Erläuterung dieses Begriffes nehmen wir an, daß ein Investor ein Portefeuille anlegt, dessen Wert am Ende der Periode gleich der Summe aus a) einer sicheren Größe $M_2=M_2^o$ und b) dem Produkt aus $y_2=y_2^o$ und der Zufallsvariablen q_{22} ist. Es wird gesagt, der Investor sei risikoscheu, wenn in $E[U(M_2^o+q_{22}y_2)] = U(M_2^o+E[q_{22}y_2] - Pr)$ die Risikoprämie Pr positiv ist. Im allgemeinen ist Pr eine Funktion von M_2^o und $q_{22}y_2$, d.h. $Pr=Pr(M_2^o, q_{22}y_2)$. Der Ausdruck $E[q_{22}y_2]-Pr(M_2^o,q_{22}y_2)$ wird Sicherheitsäquivalent der Zufallsvariablen $q_{22}y_2$ genannt. Entsprechend gibt $M_2^o+E[q_{22}y_2]-Pr(M_2^o,q_{22}y_2)$ das Sicherheitsäquivalent des ganzen Portefeuilles an (vgl. J.W. Pratt [76], S.124 f. und H. Schneeweiß [98], S.62). Ist $Pr(M_2^o,q_{22}y_2)$ für alle Verteilungen von q_{22} positiv, so ist die Funktion $U=U(M_2)$ konkav zur M_2-Achse (vgl. K.J. Arrow [4], S.31; H. Schneeweiß [98], S.62f.)

2) K.J. Arrow [4], S.33 und [5], S.26.

Die gegenüber linearen Transformationen invarianten Größen R_A und R_R werden als Maß für die absolute (R_A) bzw. relative (R_R) Risikoaversion verwendet, was einleuchtet, wenn man folgende Interpretation berücksichtigt:

(23) entspricht der Aussage, daß für den Entscheidenden das Sicherheitsäquivalent[1] einer Wahrscheinlichkeitsverteilung (Wette) mit M_2 steigt, d.h. mit wachsendem M_2 ist der Anleger bereit, absolut größere Risiken einzugehen[2].
(24) beinhaltet[3]: "...if both wealth and the size of the bet are increased in the same proportion, the willingness to accept the bet (as measured by the odds demanded) should decrease."

Die Gültigkeit von (23) hat für die Wirkung einer Änderung von M_1 auf y_2 gemäß (12) folgende Konsequenz[4]

(26) $\quad dy_2/dM_1 \gtreqless 0 \quad .$

Hingegen läßt sich mit dieser Restriktion allein noch nichts über die Wirkung einer Änderung von M_1 auf y_1 sagen; es ist nicht ausgeschlossen, daß $dy_2/dM_1 > 1$ und damit $dy_1/dM_1 < 0$.

---

1) Vgl. Fußnote 1) auf S.38.

2) Vgl. K.J. Arrow [4], S.34 und J.W. Pratt [76], S.130 ff.

3) K.J. Arrow [4], S.36.

4) Siehe Anhang II. Dort ist gezeigt, daß $E[U''r_e] \gtreqless 0$. Beachtet man (14) und die Tatsache, daß q_{12} in (12) keine Zufallsvariable ist und daher vor die Klammer gezogen werden kann, so folgt (26). Ein Versehen liegt folglich bei A. Sandmo [89] vor, der in einem Appendix A eine $E[U''r_e] \gtreqless 0$ völlig äquivalente Aussage beweist, im weiteren Verlauf ([89] Appendix B und S.114) aber ohne weitere Begründung von $E[U''r_e] > 0$ ausgeht. Das Versehen scheint letztlich auf K.J. Arrow zurückzugehen, denn Sandmo verweist bei seiner Überlegung auf eine mündliche Mitteilung von Arrow, der seinerseits ([4], S.43) schreibt, eine $E[U''r_e]$ entsprechende Größe sei positiv. Dafür wird kein Beweis erbracht.

Dies kann allerdings nicht mehr gelten, wenn nicht nur (23) sondern auch (24) gilt.

Dann ist[1)]

$$(27) \qquad dy_1/dM_1 \gtreqless 0 \quad .$$

Freilich ist hiermit noch nicht allzu viel gewonnen - wir haben nur die Gewißheit, daß zumindest in diesem speziellen Fall mit einem sicheren und einem risikablen Papier der "Einkommenseffekt" für beide Anlagemöglichkeiten nicht negativ ist.

Wir beachten, daß für U aufgrund der Definition für die absolute Risikoaversion geschrieben werden kann[2)]

$$(28) \qquad U(M_2) = C_1 \int e^{-\int R_A(M_2)dM_2} + C_2 \qquad \text{mit } C_1 \text{ und } C_2$$

als Integrationskonstanten. Bei Kenntnis von $R_A(M_2)$ ist U durch (28) bis auf eine lineare Transformation bestimmt. Da das Konzept des erwarteten Nutzens ohnedies nur voraussetzt, daß die zugrunde liegenden Nutzenfunktionen bis auf eine lineare Transformation bestimmt sind, kennen wir mit $R_A(M_2)$ alle relevanten Eigenschaften von U.

Die Hypothesen (23) und (24) lassen allerdings für $R_A(M_2)$ noch viele denkbare Verläufe zu. Somit ist auch U keineswegs eindeutig bestimmt. Die Klasse der zugelassenen Nutzenfunktionen scheint zu groß, als daß bei Vorhandensein von mehr als einem risikablen Papier eindeutige Aussagen über die optimale Anlagepolitik getroffen werden könnten. Wir wollen daher zunächst eine sehr spezielle Funktion $U = U(M_2)$ herausgreifen, die

---

1) Vgl. Anhang II.

2) Vgl. J.W. Pratt [76], S.126.

zwar die Hypothese (23) nicht erfüllt[1], und die auch weitere Nachteile aufweist, die es aber anderseits erlaubt, in einfacher Weise den Übergang zu den μ,σ-Kriterien zu finden.

7.2. Die Slutsky-Gleichungen bei n Anlagemöglichkeiten und quadratischer Nutzenfunktion

In diesem Abschnitt werden die gleichen Symbole wie auf S. 34 verwandt mit folgenden Modifikationen:

a. $U = U(M_2)$ hat die spezielle Form

$$(29) \quad U = M_2 + \frac{b}{2} M_2^2 \quad \text{mit } M_2 < -\frac{1}{b} \text{ und } b < 0 .$$

b. q_{i2} kann eine Zufallsvariable sein.
c. Die Indizes i und j laufen von 1 bis n.

Der Lagrangeansatz zur Maximierung des Portefeuillewertes nach einer Periode lautet[2]:

$$(30) \quad \Phi = E\left[\sum_{i=1}^{n} q_{i2}y_i + \frac{b}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} q_{i2}y_i\right)^2\right] + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} q_{i1}y_i - M_1\right)$$

mit λ als Lagrangefaktor. Setzt man:

$E|q_{i2}| = \bar{q}_{i2}$ und $\mathrm{Cov}(q_{i2},q_{j2}) = \sigma_{ij}$, so folgt

$$(31) \quad \Phi = \sum_{i=1}^{n} \bar{q}_{i2}y_i + \frac{b}{2} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (\sigma_{ij} + \bar{q}_{i2}\bar{q}_{j2})y_i y_j + \lambda \sum_{i=1}^{n} (q_{i1}y_i - M_1) .$$

---

1) Vgl. K.J. Arrow [5], S. 26; für die Funktion (29) etwa gilt: $R_A = -\frac{b}{1+bM_2}$ und $\frac{dR_A}{dM_2} = \frac{b^2}{(1+bM_2)^2} > 0$ im Gegensatz zu (23).

2) Er entspricht weitgehend dem von S. Royama and K. Hamada [84], S. 29; allerdings werden dort die heutigen Preise nicht explizit eingeführt.

Die Differentiation von (31) nach y_i $(i=1,\ldots,n)$ und λ führt zu:

$$(32) \qquad \Phi_{y_i} = \bar{q}_{i2} + b\sum_{j=1}^{n}(\sigma_{ij}+\bar{q}_{i2}\bar{q}_{j2})y_j + \lambda q_{i1} = 0 \qquad (i=1,\ldots,n)$$

$$(33) \qquad \Phi_{\lambda} = \sum_{i=1}^{n} q_{i1}y_i - M_1 = 0$$

bzw.

$$(34) \qquad \begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} & q_{11} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} & q_{n1} \\ q_{11} & \cdots & q_{n1} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ y_n \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{q}_{12} \\ \cdot \\ -\bar{q}_{n2} \\ M_1 \end{bmatrix}$$

mit $\quad m_{ij} = b(\sigma_{ij}+\bar{q}_{i2}\bar{q}_{j2})$

Unterstellt man, daß die Matrix $-M = -[m_{ij}]$ Positiv definit[1] ist, so hat $E[U(M_2(\mathfrak{y}))]$ einen streng konkaven Verlauf über $\mathfrak{y}$.

Beweis[2]:

Es seien:

$\bar{\mathfrak{q}}' = [q_{12},\ldots,q_{n2}]$ der Vektor der erwarteten Preise im Zeitpunkt 2

$\mathfrak{y}_1' = [y_{11},\ldots,y_{n1}]$ ein Vektor 1 der von den einzelnen Papieren gekauften Mengen

$\mathfrak{y}_2' = [y_{12},\ldots,y_{n2}]$ ein Vektor 2 der von den einzelnen Papieren gekauften Mengen

$\mathfrak{y}^* = [\theta\mathfrak{y}_2+(1-\theta)\mathfrak{y}_1]$ mit $0<\theta<1$

Dann ist:

$$E[U(M_2(\mathfrak{y}^*))] = \bar{\mathfrak{q}}'\mathfrak{y}^* + \tfrac{1}{2}\mathfrak{y}^{*\prime}M\mathfrak{y}^*$$

$$= \bar{\mathfrak{q}}'[\theta\mathfrak{y}_2+(1-\theta)\mathfrak{y}_1] + \tfrac{1}{2}[\theta\mathfrak{y}_2+(1-\theta)\mathfrak{y}_1]'M[\theta\mathfrak{y}_2+(1-\theta)\mathfrak{y}_1]$$

---

1) Eine Matrix C ist positiv definit (bzw. eigentlich positiv definit), wenn mit einem beliebigen Vektor $\mathfrak{y}$ gilt: $\mathfrak{y}'C\mathfrak{y} > 0$. C ist positiv semidefinit (bzw. uneigentlich positiv definit), wenn $\mathfrak{y}'C\mathfrak{y} \geq 0$. C ist negativ (semi-)definit, wenn -C positiv (semi-) definit ist. Vgl. G. Hadley [38], S. 41. - Zur obigen Annahme vgl. D.D.McFarlane [68], S.41/42 und S. Royama and K. Hamada [84], S.28/29.

2) Vgl. G. Hadley [38], S.84 f.

Da M symmetrisch ist, gilt:

$$E[U(M_2(\mathfrak{y}^*))] = \theta\bar{\mathfrak{y}}'\mathfrak{y}_2+(1-\theta)\bar{\mathfrak{y}}'\mathfrak{y}_1+\tfrac{1}{2}(\mathfrak{y}_1'M\mathfrak{y}_1+2\theta(\mathfrak{y}_2-\mathfrak{y}_1)'M\mathfrak{y}_1 +\theta^2(\mathfrak{y}_2-\mathfrak{y}_1)'M(\mathfrak{y}_2-\mathfrak{y}_1))$$

Schließlich gilt wegen $\theta^2<\theta$, und da M mit $b<0$ negativ definit ist:

$$\bar{\mathfrak{y}}'\mathfrak{y}^*+\tfrac{1}{2}\mathfrak{y}^{*\prime}M\mathfrak{y}^* > \theta\bar{\mathfrak{y}}'\mathfrak{y}_2+(1-\theta)\bar{\mathfrak{y}}'\mathfrak{y}_1+\tfrac{1}{2}(\mathfrak{y}_1'M\mathfrak{y}_1+\theta(\mathfrak{y}_2-\mathfrak{y}_1)'M\mathfrak{y}_1 +\theta(\mathfrak{y}_2-\mathfrak{y}_1)'M\mathfrak{y}_2)$$

$$> \theta\bar{\mathfrak{y}}'\mathfrak{y}_2+(1-\theta)\bar{\mathfrak{y}}'\mathfrak{y}_1+\tfrac{1}{2}(\theta\mathfrak{y}_2'M\mathfrak{y}_2+(1-\theta)\mathfrak{y}_1'M\mathfrak{y}_1)$$

$$> \theta\,(\bar{\mathfrak{y}}'\mathfrak{y}_2+\tfrac{1}{2}\mathfrak{y}_2'M\mathfrak{y}_2)+(1-\theta)(\bar{\mathfrak{y}}'\mathfrak{y}_1+\tfrac{1}{2}\mathfrak{y}_1'M\mathfrak{y}_1)$$

Es gilt also:

$$E[U(M_2(\mathfrak{y}^*))] = E[U(M_2(\theta\mathfrak{y}_2+(1-\theta)\mathfrak{y}_1))] > \theta E[U(M_2(\mathfrak{y}_2)] + (1-\theta)E[U(M_2(\mathfrak{y}_1))]$$

d.h. $E\,U(M_2(\mathfrak{y}))$ ist streng konkav q.e.d.

Die hinreichenden Bedingungen für ein Maximum von (3o) sind damit erfüllt[1]. - Weiterhin ist mit der negativen Definitheit von M auch die Nichtsingularität der geänderten Koeffizientenmatrix in (34) gewährleistet[2]. Folglich ist die zugehörige Determinante D ungleich Null und die Lösung nach $[y_1,\ldots,y_n,\lambda]$ läßt sich mit Hilfe der Cramer'schen Regel unmittelbar angeben. - Um die Abhängigkeit der Größen y_i von M_1 bzw. q_{11} $(i=1,\ldots,n)$ zu ermitteln, differenzieren wir das Gleichungssystem (34) und erhalten[3]:

$$(35)\qquad \begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} & q_{11} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} & q_{n1} \\ q_{11} & \cdots & q_{n1} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial y_1/\partial M_1 \\ \vdots \\ \partial y_n/\partial M_1 \\ \partial\lambda/\partial M_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

---

1) Sie müssen nicht mehr zusätzlich überprüft werden, was bei S. Royama and K. Hamada [84], S.3o nicht völlig klar ist.

2) Vgl. H.P. Künzi und W. Krelle [52], S.3o sowie P.A. Samuelson [86], S.376 Fußnote 14.

3) Vgl. S. Royama and K. Hamada [84], S.31.

bzw.

$$(36)\qquad \begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} & q_{11} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ m_{i1} & \cdots & m_{in} & q_{i1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ m_{n1} & & m_{nn} & q_{n1} \\ q_{11} & \cdots & q_{n1} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial y_1/\partial q_{11} \\ \cdot \\ \partial y_i/\partial q_{11} \\ \cdot \\ \partial y_n/\partial q_{11} \\ \partial\lambda/\partial q_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ -\lambda \\ \cdot \\ 0 \\ -y_1 \end{bmatrix}$$

Wird mit $K_{q_{11}}$ (bzw. $K_{m_{ij}}$) der Kofaktor des Elements q_{11} (bzw. m_{ij}) bezeichnet, so ergibt sich:

$$(37)\qquad \frac{\partial y_k}{\partial M_1} = \frac{K_{q_{k1}}}{D} \qquad \text{und}$$

$$(38)\qquad \frac{\partial y_k}{\partial q_{11}} = \frac{-\lambda K_{m_{1k}} - y_1 K_{q_{k1}}}{D} \qquad \text{oder}$$

$$(39)\qquad \frac{\partial y_k}{\partial q_{11}} = -\lambda \frac{K_{m_{1k}}}{D} - y_1 \frac{\partial y_k}{\partial M_1} \qquad (i=1,\ldots,n)$$

wobei D jeweils die Koeffizientendeterminante aus (35) bzw. (36) darstellt.

Dies sind die Slutsky-Gleichungen bei n Anlagemöglichkeiten und bei quadratischer Nutzenfunktion. Die Übereinstimmung mit der normalen Haushaltstheorie ist fast vollständig. Es kann daher darauf verzichtet werden, den Einkommens- und Substitutionseffekt näher zu untersuchen; die Aussagen hierfür lassen sich unmittelbar aus der Darstellung von Hicks[1] für den Fall der Sicherheit übernehmen.

Auf zwei Punkte soll jedoch noch hingewiesen werden:
1. Wird gefordert, daß die Größen y_i nur positiv sein dürfen, so müssen die Gleichungen (32) und (33) durch die entsprechenden Kuhn-Tucker Bedingungen[2] ersetzt werden; es muß gelten:

---

1) J.R. Hicks [41], S. 3o9 f.

2) Knappe Darstellungen dieser Bedingungen finden sich bei G. Hadley [38], S. 185 ff. und H.P. Künzi und W. Krelle [52], S. 59 ff.

$$(32') \quad \Phi_{y_i} = \bar{q}_{i2} + b \sum_{j=1}^{n} (\sigma_{ij} + \bar{q}_{i2}\bar{q}_{j2}) y_j + \lambda q_{i1} \begin{cases} <0 \text{ wenn } y_i = 0 \\ =0 \text{ wenn } y_i > 0 \end{cases}$$

$$(33') \quad \Phi_{\lambda} = \sum_{i=1}^{n} q_{i1} y_i - M_1 \qquad \begin{cases} >0 \text{ wenn } \quad =0 \\ =0 \text{ wenn } \quad >0 \end{cases}$$

Die Maximierungsaufgabe (3o) ist dann nur als quadratisches Programm lösbar. Allerdings ist dies - wie Lintner[1] betont - nich erforderlich, wenn man negative y_i als Terminverkäufe des Papiers i interpretiert[2].

2. Wird für das Papier k unterstellt, daß $\bar{q}_{k2} < q_{k1}$, so folgt daraus nicht notwendigerweise, daß $y_k < 0$; d.h. es kann lohnend sein, das Papier k auch dann zu halten, wenn man einen Preis erwartet, der unter dem heutigen liegt. Es muß nur gewährleistet sein, daß q_{k2} mit den übrigen Preisen hinreichend negativ korreliert ist[3]. Im Grunde ist diese Bemerkung trivial, denn sobald in der Funktion $E[U(M_2(y))]$ neben dem Erwartungswert $\bar{q}_{k2}$ andere Parameter berücksichtigt werden (hier die Größen $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$ $i=1,\ldots,n$), kann aus $\bar{q}_{k2}$ allein eben auch noch kein Schluß auf das Vorzeichen von y_k gezogen werden.

Wir haben die quadratische Nutzenfunktion benutzt, um die Analogie zwischen der Bestimmung von optimalem Portefeuille und optimalem Konsumplan auch für die Fälle aufzuzeigen, in denen es mehr als nur zwei Papiere gibt. Eine solche Funktion besitzt nun aber nicht nur den Nachteil, daß sie gegen die Hypothese (23) verstößt und risikable Anlagen somit zu inferioren Gütern macht[4], sondern

---

1) J. Lintner [57], S. 681 ff.

2) Unter praktischen Gesichtspunkten ist zu beachten, daß in Deutschland Termingeschäfte in Wertpapieren seit 1931 verboten sind; siehe Dr. Gablers Wirtschafts-Lexikon [31], S. 1439.

3) Vgl. J. Lintner [57], S. 687 f. und A.A. Robichek and St.C. Myers [82], S. 221/222.

4) K.J. Arrow [5], S.26.

sie impliziert auch für $M_2 > -1/b$ einen negativen Grenznutzen, was irreal erscheint. Darüberhinaus wird bemängelt[1], daß sie sich zur Approximation von realistischeren Nutzenfunktionen nicht sehr gut eignet.

Auf der anderen Seite läßt sich in diesem Fall (vgl. (31)) der erwartete Nutzen in einfacher Weise als Funktion des Mittelwertes $\bar{M}_2$ und der Streuung σ^2 allein darstellen. Der Entscheidung wurde also bereits ein ganz bestimmtes μ,σ-Prinzip (mit $\mu=\bar{M}_2$) zugrunde gelegt.

Wir wollen im folgenden untersuchen, inwieweit sich die festgestellten Übereinstimmungen zwischen Entscheidung bei Risiko und Haushaltstheorie auch bei Verwendung anderer μ,σ-Prinzipien beobachten lassen.

7.3. Die Verwendung von μ,σ-Prinzipien

7.3.1. Über den Zusammenhang zwischen der Maximierung des erwarteten Nutzens und der Entscheidung aufgrund von μ,σ-Prinzipien

Es sei vorausgesetzt, daß der erwartete Nutzen $E[U(M_2(\mathbf{y}))]$ als Funktion Ψ des Mittelwertes $\mu = \bar{M}_2 = \bar{\mathbf{y}}'\mathbf{y}$ und der Standardabweichung $\sigma = [\mathbf{y}'S\,\mathbf{y}]^{1/2}$ mit $S = [\sigma_{ij}]$ geschrieben werden kann[2].

Beschränken wir uns der Einfachheit wegen auf eine Analyse, bei der bestimmte Kombinationen $\mathbf{y}$ aus nur zwei Papieren gewählt werden sollen, so gilt daher

---

1) J. Lintner [57], S.680 Fußnote 20.

2) Falls keine Einschränkung der zugelassenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen für M_2 erfolgt, steckt darin die Annahme der quadratischen Nutzenfunktion. Wenn eine gegebene Präferenzfunktion mit dem Bernoulli-Prinzip vereinbar sein soll, so hat dies ganz allgemein eine gewisse Substitutionalität zwischen den zugelassenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen und Nutzenfunktionen zur Folge. Eine große Klasse zugelassener Wahrscheinlichkeitsverteilungen bewirkt, daß nur noch relativ wenige Nutzenfunktionen in Betracht kommen - entsprechend umgekehrt.
Siehe H. Schneeweiß [98], S.96 und S.129 ff.

(40) $\Psi[\mu(y_1,y_2),\sigma(y_1,y_2)] = E[U(M_2(y_1,y_2))]$ mit

(41) $\mu = \bar{q}_{12}y_1+\bar{q}_{12}y_2$ und $\sigma = [\sigma_{11}y_1^2+2\sigma_{12}y_1y_2+\sigma_{22}y_2^2]^{\frac{1}{2}}$

Es wird ferner angenommen, daß $[\sigma_{ij}]$ (i,j=1,2) positiv definit ist, und daß[1)]

$$\Psi_{\sigma\mu} = \Psi_{\mu\sigma} \quad .$$

Schließlich gelte:

(42) $\Psi_\mu > 0$ und $\Psi_\sigma < 0$.

Wir betrachten also nur den Fall des "risk-averters"[2)].

Die notwendigen Bedingungen für die Maximierung von (40) lauten:

(43) $\Psi_{y_i} = \Psi_\mu \mu_{y_i} + \Psi_\sigma \sigma_{y_i} = 0$; (i=1,2) bzw.

$$\mu_{y_i} = a\sigma_{y_i} \quad \text{mit}$$

(44) $a = -\frac{\Psi_\sigma}{\Psi_\mu} > 0$ (wegen (42)) .

Betrachten wir zum Vergleich das folgende Problem:
Es sind diejenigen realisierbaren Punkte (μ^*,σ^*) zu finden, für die alle anderen realisierbaren Punkte (μ,σ) die Bedingung:

---

1) Wir benutzen folgende Schreibweise

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\mu} = \Psi_\mu \; ; \; \frac{\partial\Psi}{\partial\sigma} = \Psi_\sigma \; ; \; \frac{\partial^2\Psi}{\partial\mu\partial\sigma} = \Psi_{\mu\sigma} \; ; \; \frac{\partial^2\Psi}{\partial\sigma\partial\mu} = \Psi_{\sigma\mu} \quad .$$

σ_{y_i} (bzw. μ_{y_i}) steht für $\partial\sigma/\partial y_i$ (bzw. $\partial\mu/\partial y_i$) .

2) Vgl. Fußnote 2) auf S.38.

(45) $\sigma^* < \sigma$ wenn $\mu^* < \mu$
$\mu < \mu^*$ wenn $\sigma < \sigma^*$

erfüllen.

Man bezeichnet[1] solche Punkte als effizient, ihre Gesamtheit als Effizienzkurve. Die zur Ermittlung effizienter Punkte gebildete Lagrangefunktion L mit dem Lagrangefaktor λ lautet[2]:

(46) $L = \sigma(y_1,y_2) + \lambda(\mu(y_1,y_2) - \mu^*)$

Notwendig für ein Minimum von L ist[3]

(47) $L_{y_i} = \sigma_{y_i} + \lambda\mu_{y_i} = 0$; (i=1,2) und

(48) $L_\lambda = \mu(y_1,y_2) - \mu^* = 0$

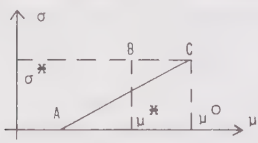
Die Bedingungen (43) und (47) stimmen offenbar dann überein, wenn

(49) $a = -\frac{1}{\lambda}$.

Aufgrund von (44) wissen wir, daß a gleich der Steigung $d\mu/d\sigma$ einer Indifferenzkurve $\Psi(\mu,\sigma)$ = konstant im μ,σ-Diagramm ist. Wird die Lösung (y_1,y_2) von (47)

---

1) Siehe J. Tobin [111], S.23. Wenn ein Vektor (46) minimiert, erfüllt er nicht notwendigerweise die Effizienzbedingung (45). Es könnte sein, daß die zu μ^o, $\mu^o > \mu^*$ gehörende minimale Streuung nicht größer ist als die zu μ^* gehörende. Eine solche Möglichkeit ist freilich ausgeschlossen, wenn ein risikoloses Papier existiert, was sich am leichtesten graphisch zeigen läßt: Angenommen B und C in nebenstehender Figur seien Lösungen von (47) und (48). Wenn ein risikoloses Papier existiert, ist auch ein bestimmter Punkt A auf der μ-Achse erreichbar. Wir wissen aber, daß dann jede konvexe Kombination von A und C zu realisieren ist (vgl. etwa J. Tobin [112], S.33). B kann daher keine Lösung von (47) und (48) sein, da sich das zu B gehörende μ^* auf jeden Fall mit einer geringeren Standardabweichung als σ^* erreichen läßt.



2) Zur Symbolik vgl. Fußnote 1) auf S.47.

in $\sigma = \sigma(y_1, y_2)$ eingesetzt, so erhalten wir die zu μ^* gehörende Standardabweichung σ^*. Schließlich gilt[1]: $d\sigma^*/d\mu^* = -\lambda$. (49) gibt daher folgende bekannte Tatsache an[2]: Sieht man von Randoptima ab, so ist die (4o) maximierende μ,σ-Kombination notwendigerweise gleich derjenigen, bei der sich Indifferenz- und Effizienzkurve tangieren.

Hinreichend für ein Maximum von (4o) ist

(5o) $\qquad \psi_{y_1,y_1} < 0 \qquad$ und

(51) $\qquad \phi = \begin{vmatrix} \psi_{y_1,y_1} & \psi_{y_1,y_2} \\ \psi_{y_2,y_1} & \psi_{y_2,y_2} \end{vmatrix} > 0$

(5o) lautet ausführlich geschrieben (beachte $\mu_{y_1 y_1} = 0$!):

$$\psi_{y_1y_1} = (\psi_{\mu\mu}\mu_{y_1} + \psi_{\mu\sigma}\sigma_{y_1})\mu_{y_1} + \psi_{\sigma}\sigma_{y_1y_1} + (\psi_{\sigma\mu}\mu_{y_1} + \psi_{\sigma\sigma}\sigma_{y_1})\sigma_{y_1}$$

$$= a\sigma_{y_1}^2 (a\psi_{\mu\mu} + \psi_{\mu\sigma} + \psi_{\sigma\mu} + \frac{1}{a}\psi_{\sigma\sigma}) + \psi_{\sigma}\sigma_{y_1y_1}$$

Aus (41) ergibt sich, wenn wir die positive Definitheit von $[\sigma_{ij}]$ beachten:

(52) $\qquad \sigma_{y_1y_1} = \frac{y_2^2}{\sigma^3}(\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2) > 0$

Weiterhin gilt wegen (42) und (44) $\psi_{\sigma} < 0$ und $a > 0$ so daß

(53) $\qquad a\psi_{\mu\mu} + 2\psi_{\mu\sigma} + \frac{1}{a}\psi_{\sigma\sigma} = c < 0$ genügt, um die Bedingung (5o) zu erfüllen.

---

1) Vgl. G.Hadley [38], S.73.

2) Vgl. etwa J. Tobin [111], S.16.

Entsprechend läßt sich (51) umformen in

$$(54)\quad \Phi = \begin{vmatrix} ac\sigma_{y_1}^2 + \Psi_\sigma \sigma_{y_1 y_1} & ac\sigma_{y_1}\sigma_{y_2} + \Psi_\sigma \sigma_{y_1 y_2} \\ ac\sigma_{y_2}\sigma_{y_1} + \Psi_\sigma \sigma_{y_2 y_1} & ac\sigma_{y_2}^2 + \Psi_\sigma \sigma_{y_2 y_2} \end{vmatrix}$$

was unter Beachtung von (52) und den aus (41) ermittelten Ausdrücken

$$(55)\quad \sigma_{y_1 y_2} = \sigma_{y_2 y_1} = \frac{y_1 y_2}{\sigma^3}(\sigma_{12}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22}) < 0;$$

$$\sigma_{y_2 y_2} = \frac{y_1^2}{\sigma^3}(\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2)$$

folgendes ergibt:

$$(56)\quad = ac\Psi_\sigma \, \sigma_{y_1}^2 \sigma_{y_2 y_2} - 2\sigma_{y_1}\sigma_{y_2}\sigma_{y_1 y_2} + \sigma_{y_2}^2 \sigma_{y_1 y_1} \; .$$

Der Klammerausdruck in (56) kann auch als

$$(57)\quad \begin{vmatrix} \sigma_{y_1}^2 & \sigma_{y_1 y_2} \\ \sigma_{y_1}\sigma_{y_2} & \sigma_{y_2 y_2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{y_1 y_1} & \sigma_{y_1}\sigma_{y_2} \\ \sigma_{y_1 y_2} & \sigma_{y_2}^2 \end{vmatrix}$$

geschrieben werden. Beachtet man die Beziehungen

$$(58)\quad \sigma_{y_1 y_1} = \frac{1}{\sigma}(\sigma_{11} - \sigma_{y_1}^2); \quad \sigma_{y_1 y_2} = \frac{1}{\sigma}(\sigma_{12} - \sigma_{y_1}\sigma_{y_2});$$

$$\sigma_{y_2 y_2} = \frac{1}{\sigma}(\sigma_{22} - \sigma_{y_2}^2)$$

so läßt sich (57) nach einigen Zwischenschritten in

$$\frac{1}{\sigma}\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{vmatrix}$$

umwandeln; diese Größe und damit der Klammerausdruck in (56) ist wegen der angenommenen positiven Definitheit von $[\sigma_{ij}]$ größer als Null. Folglich genügt die Lösung von (43) mit $c<0$ auch der zweiten hinreichenden Bedingung für ein Maximum von $E[U]$.

Nun ist

$$(59)\quad \frac{d^2\sigma}{d\mu^2} = \frac{-1}{(\psi_\sigma)^2}\left[\psi_\sigma(\psi_{\mu\mu}-\psi_{\mu\sigma}\frac{\psi_\mu}{\psi_\sigma})-\psi_\mu(\psi_{\sigma\mu}-\psi_{\sigma\sigma}\frac{\psi_\mu}{\psi_\sigma})\right] < 0$$

genau dann, wenn

$$(60)\quad \psi_\sigma(\psi_{\mu\mu}-\frac{\psi_\mu}{\psi_\sigma}\psi_{\mu\sigma})-\psi_\mu(\psi_{\sigma\mu}-\frac{\psi_\mu}{\psi_\sigma}\psi_{\sigma\sigma}) > 0$$

Wegen (44) und $\psi_\sigma < 0$ tritt (60) dann und nur dann ein, wenn (53) gilt. Die Erfüllung der Bedingungen (50) und (51) ist also gleichbedeutend mit einem zur μ-Achse konkaven Verlauf von $\sigma = \sigma(\mu)$ [1].

Wir beachten noch folgenden Zusammenhang: Wird (46) durch den geringfügig modifizierten Ansatz

$$L_1 = \sigma_{11}y_1^2+2\sigma_{12}y_1y_2+\sigma_{22}y_2^2 + 2\lambda(\bar{q}_{12}y_1+\bar{q}_{22}y_2-\mu^*)$$

ersetzt, so lauten die notwendigen Bedingungen für ein Maximum von L_1:

$$(61)\quad \begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \bar{q}_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \bar{q}_{22}\\ \bar{q}_{12} & \bar{q}_{22} & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ \lambda\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \mu^*\end{bmatrix}$$

Man erkennt hieraus unmittelbar, daß sowohl y_1 wie y_2 proportional zu μ^* sind. Die zugehörige Standardabweichung σ^* ist gemäß (41) ebenfalls proportional zu μ^*.

Es ist klar, daß diese Überlegung auch für i=1,...,n mit $n > 2$ gilt. Der lineare Zusammenhang zwischen σ^* und μ^* wird nicht aufgehoben, wenn in der Aufgabe (46) als weitere Nebenbedingung die Budgetrestriktion

$$(62)\quad \sum_{i=1}^{n} q_{11}y_1 = M_1$$

berücksichtigt wird, sofern nur ein Wertpapier existiert, das risikolos ist, für das also $\sigma_{11} = \sigma_{11} = 0$

---

1) Diese Art der Beweisführung läßt sich allerdings nicht ohne weiteres auf den Fall übertragen, in dem mehr als 2 Papiere berücksichtigt werden.

mit i = 1,...,n gilt. Ordnen wir die Wertpapiere so an, daß das risikolose die Nummer 1 erhält, so läßt sich nach Elimination von y_1 gemäß (62) das (61) für n > 2 äquivalente System wie folgt schreiben:

$$(63)\quad \begin{bmatrix} \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} & \bar{q}_{22}-q_{21}\frac{\bar{q}_{12}}{q_{11}} \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} & \bar{q}_{n2}-q_{n1}\frac{\bar{q}_{12}}{q_{11}} \\ \bar{q}_{22}-q_{21}\frac{\bar{q}_{12}}{q_{11}} & \cdots & \bar{q}_{n2}-q_{n1}\frac{\bar{q}_{12}}{q_{11}} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_2 \\ \cdot \\ y_n \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ 0 \\ \mu^*-M_1\frac{\bar{q}_{12}}{q_{11}} \end{bmatrix}$$

Wiederum erkennt man leicht, daß alle y_i (i = 2,...,n) - und damit auch σ^* - proportional zu

$\mu^* - M_1 \frac{\bar{q}_{12}}{q_{11}}$ sind. σ^* ist daher linear von μ^* abhängig.

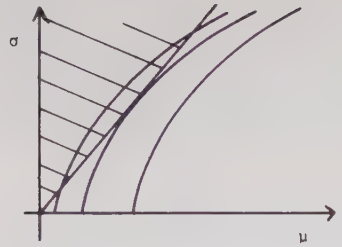
Es sei noch angemerkt, daß $\bar{q}_{12}-q_{11}\frac{\bar{q}_{12}}{q_{11}}$ nichts anderes darstellt als den Erwartungswert der Überschußzinsen, die dann erzielt werden, wenn q_{11} DM nicht zum Erwerb von Papieren des Typs i aufgewandt, sondern sicher angelegt werden[1].

Die Gegenüberstellung von Effizienzkurve und Indifferenzkurven im μ,σ-Diagramm ergibt damit folgendes be-

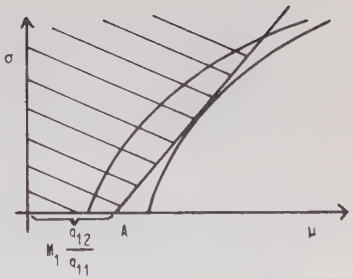
---

1) Man kann leicht zeigen, daß folgendes gilt: Angenommen $[y_2^*,\ldots,y_n^*]$ ist eine Lösung von (63). Dann stellt $[1-\sum_{j=2}^{n} q_{j1}y_j^*/M_1; q_{21}y_2^*/M_1,\ldots,q_{n1}y_n^*/M_1]$ den Vektor der Anteile von M_1 dar, die für den Erwerb der einzelnen Papiere aufgewandt werden müssen, wenn die Streuung der Verzinsung von M_1 unter der Nebenbedingung minimiert werden soll, daß eine bestimmte Verzinsung $\mu^*/M_1 - q_{12}/q_{11}$ erreicht wird. In dieser Form wird das Problem, effiziente Portefeuilles zu bestimmen, häufig diskutiert; vgl. H.M. Markowitz [65], S. 133 ff. J. Lintner [57], S. 681 ff. und J. Tobin [111], S. 21 ff.

kannte Bild[1]:



Figur 1



Figur 2

Die zuletzt genannten Autoren benutzen zur Bestimmung optimaler Portefeuilles ein Diagramm, dessen Achsen der Erwartungswert und die Standardabweichung des Satzes bilden, mit dem sich ein beliebiger Anfangsbetrag verzinst. Dies hat einen erheblichen Nachteil. Auch die zugrunde gelegte Nutzenfunktion muß über Zinssätzen und nicht absoluten Vermögensbeträgen definiert sein (vgl. J. Tobin [111], S. 12). Offenbar hängt dann die proportionale Zusammensetzung des Portefeuilles nicht von der Höhe des Anfangsvermögens M_1 ab. Für die hier verwandte Nutzenfunktion über M_2 würde damit die sehr spezielle Form mit konstanter r e l a t i v e r Risikoaversion impliziert (siehe oben (25) und J.W. Pratt [76], S. 134 f.) - eine Einschränkung, die für die Portefeuilleanalyse nicht zweckmäßig ist. - Neuerdings weist W. Breen ([18]) auf diese Konsequenz hin. Allerdings stellt er zu Unrecht fest ([18], S.365, Fußnote 1), daß mit dem Vorgehen der oben genannten Autoren eine Nutzenfunktion impliziert sei, die Pratt ([76], S. 130) für den FAll konstanter a b s o l u t e r Risikoaversion angibt. Legt man eine solche Nutzenfunktion zugrunde, so ändert sich die proportionale Zusammensetzung des Portefeuilles bei steigendem M_1 sehr wohl; der Anteil des sicheren Papiers wird größer (vgl. J.W. Pratt [76], S. 135 und die dort angegebene Quelle von K.J. Arrow - das Original konnte leider auch von Arrow selbst nicht zur Verfügung gestellt werden).

1) Zu Figur 1 vgl. Figur 4 bei J. Tobin [111], S. 1o. Die Achsen sind gegenüber der dortigen Darstellung vertauscht. Im übrigen bezieht sich die Größe μ_R bei Tobin auf den Erwartungswert des Satzes, mit dem sich das Gesamtportefeuille verzinst, während hier unter μ der Erwartungswert des Vermögens am Ende der Periode verstanden wird.

In der rechten Figur wird für die Effizienzkurve die Beachtung der Budgetrestriktion vorausgesetzt, in der linken nicht. Zusätzlich wird in der rechten Figur angenommen, daß ein risikoloses Papier existiert. Die schraffiert eingezeichnete Fläche kennzeichnet jeweils den Bereich der erreichbaren μ,σ-Kombinationen.

7.3.2. μ,σ-Analyse und Haushaltstheorie

Man kann fragen, inwieweit diese Darstellung derjenigen der Haushaltstheorie äquivalent ist. Dort wird gezeigt, daß ein optimaler Konsumplan in dem Punkt erreicht wird, in dem sich Indifferenzkurve und Budgetgerade tangieren.

Ein solcher Vergleich erfordert, daß die Analyse aus dem μ,σ-Diagramm in das y_1,y_2-Koordinatensystem übertragen wird.

Die Budgetrestriktion (62) (für n=2) wirft keine besonderen Fragen auf. Sie hat die übliche Form einer Geraden. Untersucht werden muß jedoch der Verlauf der Indifferenzkurven.

Wir gehen zu diesem Zweck von Portefeuillekombinationen $\eta_1 = (y_{11},y_{21})$ und $\eta_2 = (y_{12},y_{22})$ aus, die im y_1,y_2-Koordinatensystem auf einer Indifferenzkurve liegen. Wenn sich zeigen läßt, daß bei einem risk-averter jede konvexe Kombination $\eta = \Theta\eta_1+(1-\Theta)\eta_2$ mit $0<\Theta<1$ einen größeren Nutzenindex erhält, ist damit der "normale" - d.h. zum Ursprung hin konvexe - Verlauf der Indifferenzkurven begründet.

Den beiden Portefeuilles η_1 und η_2 entsprechen bestimmte μ,σ-Kombinationen, nämlich (μ_1,σ_1) und (μ_2,σ_2). Es ist klar, daß auch (μ_1,σ_1) und (μ_2,σ_2) im μ,σ-Koordinatensystem auf einer Indifferenzkurve liegen. Bezeichnen wir die zur konvexen Kombination η gehörenden μ,σ-

Werte mit μ_k und σ_k, so gilt:

$$(64) \quad \mu_k = \theta\mu_1 + (1-\theta)\mu_2 \qquad \text{und}$$

$$(65) \quad \sigma_k^2 = \left[\theta^2\sigma_{11} + 2\theta(1-\theta)\sigma_{12} + (1-\theta)^2\sigma_{22}\right]$$

$$\text{mit } \sigma_{11} = \sigma_1^2 \quad \text{und} \quad \sigma_{22} = \sigma_2^2$$

Wird θ aus (64) in (65) eingesetzt und beachtet, daß sich σ_{12} mit Hilfe des Korrelationskoeffizienten ρ_{12} auch in folgender Form schreiben läßt

$$(66) \quad \sigma_{12} = \sigma_1\sigma_2\rho_{12} \ ,$$

so ergibt sich für $\sigma_k = \sigma_k(\mu_k)$ [1]

$$(67) \quad \sigma_k^2 = \frac{1}{(\mu_1-\mu_2)^2}\Big[(\sigma_{11}-2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}+\sigma_{22})\mu_k^2 - 2(\mu_2\sigma_{11} - (\mu_1+\mu_2)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}+\mu_1\sigma_{22})\mu_k + \mu_2^2\sigma_{11} - 2\mu_1\mu_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12} + \mu_1\sigma_{22}\Big]$$

Leiten wir σ_k zwei mal nach μ_k ab, so führt dies nach einigen Zwischenschritten zu

$$(68) \quad \frac{d^2\sigma_k}{d\mu_k^2} = \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}(1-\rho_{12}^2)}{\sigma_k^3(\mu_1-\mu_2)^2}$$

Da $-1 \leqq \rho_{12} \leqq +1$ ist dieser Ausdruck für $\sigma_k > 0$ nicht negativ, so daß $\sigma_k = \sigma_k(\mu_k)$ einen zur μ-Achse konvexen Verlauf hat. Untersucht man die beiden Grenzfälle $\rho_{12} = +1$ und $\rho_{12} = -1$, so zeigt sich auf Grund von (67):

a. Wenn $\rho_{12} = +1$, so werden aus $\sigma_k = \sigma_k(\mu_k)$ gemäß (67) nach einigen kleineren Umformungen die beiden Geraden

$$\sigma_k = \pm\left[\sigma_2 + (\mu_k-\mu_2)\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\mu_1-\mu_2}\right]$$

---

1) Vgl. A.D. Roy [83], S. 436 und J. Tobin [112], S. 29 f.

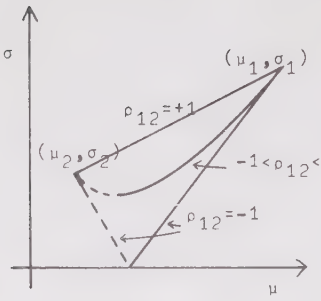
b. Wenn $\rho_{12} = -1$, so ergeben sich entsprechend die Geraden

$$\sigma_k = \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \left[-\sigma_2 + (\mu_k - \mu_2) \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{\mu_1 - \mu_2} \right]$$

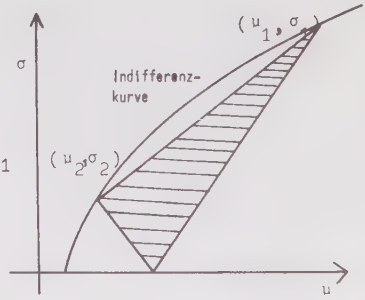
Für $-1 < \rho_{12} < +1$ hingegen hat $\sigma_k = \sigma_k(\mu_k)$ die Form einer Hyperbel [1].

Wegen $0 \leqq \theta = \frac{\mu_k - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \leqq 1$ ist von den für alle denkbaren ρ_{12} angegebenen Funktionen $\sigma_k = \sigma_k(\mu_k)$ jeweils nur ein Teilbereich relevant. Da die Standardabweichung im allgemeinen positiv definiert wird, können darüber hinaus alle unterhalb der μ-Achse liegenden Abschnitte von $\sigma_k = \sigma_k(\mu_k)$ vernachlässigt werden.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit darf angenommen werden, daß $\mu_2 < \mu_1$ und $\sigma_2 < \sigma_1$. Die für $-1 < \rho_{12} < +1$, $\rho_{12} = +1$ und $\rho_{12} = -1$ gewonnenen Verläufe von $\sigma_k = \sigma_k(\mu_k)$ werden daher wie in Figur 3 abgebildet (ineffiziente Kombinationen liegen auf den gestrichelten Abschnitten):



Figur 3



Figur 4

1) J. Tobin [112], S. 30. In seiner Beweisführung schreibt Tobin: " In case $\rho_{12}=+1$ or either σ_1 or σ_2 is zero the hyperbola degenerates into the axes." Wie unten gezeigt wird, gilt diese Aussage auch für $\rho_{12}=-1$. Tobins Darstellung (siehe seine Figur 10 in [112], S. 29) ist daher für diesen Fall nicht korrekt.

Die bei verschiedenen ρ_{12} durch konvexe Kombination von η_1 und η_2 überhaupt erreichbaren μ,σ-Werte befinden sich somit innerhalb des in Figur 4 durch Schraffierung gekennzeichneten Bereichs oder auf dessen Begrenzungslinien.

Gehen wir von folgenden Voraussetzungen aus:
a. Die Menge der zugelassenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen wird auf eine vollständige lineare μ,σ-Klasse[1] beschränkt.
b. Die Nutzenfunktion $U = U(M_2)$ ist - dem "risk-averter" entsprechend - konkav und ansteigend[2],
so wissen wir anderseits[3], daß alle (μ_1,σ_1) und (μ_2,σ_2) vorgezogenen μ,σ-Kombinationen rechts von der beide Punkte verbindenden Indifferenzkurve liegen.

Insgesamt besagt dies, daß unter Voraussetzung a. und b. jede konvexe Kombination η den beiden Portefeuilles η_1 und η_2 vorgezogen wird. Damit ist unter recht allgemeinen Einschränkungen der "normale" Verlauf der Indifferenzkurven im y_1,y_2-Diagramm begründet. Änderungen der Bilanzgeraden, hervorgerufen durch Änderungen von η_1 und/oder M_1 lassen sich in der üblichen Weise diskutieren.

Die bereits für die quadratische Nutzenfunktion angestellten Überlegungen gelten also für eine wesentlich größere Klasse von Nutzenfunktionen, wenn nur die zugelassenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen gemäß Voraussetzung a. eingeschränkt werden[4].

---

1) Vgl. zu diesem Begriff H. Schneeweiß [98], S. 121 f.
2) Vgl. Fußnote 3) auf S. 39.
3) H. Schneeweiß [98], S. 125.
4) Dies stellen auch S. Royama und K. Hamada ([84], S. 39) fest, ohne allerdings einen Beweis zu erbringen. Auch fehlt bei ihnen die einschränkende Voraussetzung, obwohl sie - wie die Erörterungen auf S. 68 zeigen werden - wesentlich ist.

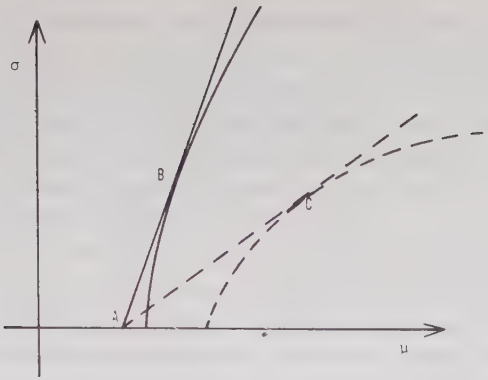
Explizit berücksichtigt wurden hier die Erwartungen. Erst mit Hilfe von (μ_1,σ_1) ; i=1,2 (allgemeiner: i=1,...,n) und ρ_{12} konnte bei zusätzlicher Kenntnis von $\Psi(\mu,\sigma)$ der Verlauf der Indifferenzkurven im y_1,y_2-Diagramm angegeben werden.

Folglich kann auch nicht gesagt werden, daß die Analyse im y_1,y_2-Raum gleichberechtigt neben diejenige mit Hilfe von μ,σ-Kriterien treten würde. Ein Unterschied zur Haushaltstheorie besteht eben doch: während dort die Präferenzordnung als originär gegeben angesehen wird, ist dies für den Fall der Entscheidung bei Risiko nicht der Fall. Hier wird versucht, die Präferenzordnung über Ψ auf zwei elementarere Bestandteile zurückzuführen - auf die subjektiven Erwartungen einerseits und die spezifische Haltung gegenüber dem Risiko andererseits. Erst diese werden als gegeben und - insbesondere was die Haltung gegenüber dem Risiko betrifft - als meßbar angesehen.

In der Realität freilich werden nur die Entscheidungen über die zu wählenden (y_1,y_2)-Kombinationen beobachtet und somit gemessen. Im Prinzip ist es denkbar, daß verschiedene Paare von Erwartungen einerseits und bestimmten Einstellungen gegenüber dem Risiko andererseits zur gleichen Wahl von (y_1,y_2) führen. Es existiert dann ein Identifikationsproblem: War der Entscheidende extrem risikofreudig, hatte aber sehr pessimistische Erwartungen, oder muß er eher als Optimist angesehen werden, der Risikosituationen gerne aus dem Weg geht? Welches ist folglich die korrekte Darstellung von Indifferenzkurve und Effizienzkurve, die zur Wahl eines ganz bestimmten Portefeuilles führen? Zwei Möglichkeiten sind beispielsweise die unten angeführten (die eine Kurvenkombination ist durchgezogen, die andere unterbrochen gezeichnet)[1]:

---

1) Es wird unterstellt, daß die zu den Punkten B und C gehörenden (y_1,y_2)-Kombinationen die gleichen sind. B entspricht pessimistischen, C optimistischen Erwartungen.



Figur 5

Fragen dieser Art werfen das schwierige Problem der simultanen Ermittlung von Nutzenfunktion und subjektiven Wahrscheinlichkeiten auf, das wir hier nicht näher behandeln wollen[1].

Überträgt man die Analyse zur Bestimmung eines optimalen Portefeuilles aus dem μ,σ-Diagramm in das y_1,y_2-Koordinatensystem, so ist die Analogie zur Bestimmung eines optimalen Konsumplans nur dann in vollem Umfang gegeben, wenn wir wie dort annehmen können, daß ein "point of bliss" zumindest innerhalb des relevanten Bereichs nicht existiert.

Dies ist jedoch nicht ohne weiteres gewährleistet, so daß wir uns näher damit befassen müssen.

7.3.3. μ,σ-Analyse und die Frage des "point of bliss"

In (47) und (48) bzw. (50) und (51) waren die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür angegeben worden, daß der erwartete Nutzen von M_2 als Funktion von $\mathcal{y}$ maximiert wird. Gibt es einen endlichen Vektor $\mathcal{y} = \mathcal{y}_b$,

1) Siehe insbesondere J. Pfanzagl [72] und die dort angegebene Literatur.

der diese Bedingungen erfüllt, so entspricht η_b einem "point of bliss"[1].

Das Eintreten dieser Bedingungen ist unter folgenden Voraussetzungen gewährleistet[2]: (a) In das Portefeuille werden nur risikable Wertpapiere aufgenommen. (b) Die Nutzenfunktion über M_2 verläuft konkav ansteigend. (c) Die Menge der zugelassenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen wird auf eine lineare vollständige μ,σ-Klasse beschränkt.

Die Existenz eines "point of bliss" mag überraschen, doch gilt es zu beachten, daß das Maximierungsproblem zunächst ohne Berücksichtigung einer Budgetrestriktion gestellt war. Auch wurde im vorigen Abschnitt keine quadratische Nutzenfunktion vorausgesetzt, so daß der "point of bliss" nichts mit dem bei dieser Funktion als nachteilig angesehenen Maximum zu tun hat[3].

Sobald freilich ein risikoloses Papier nachgefragt werden kann, gibt es bei $U'(M_2)>0$ - wie man aus (61) erkennt - keinen Vektor, der $E[U]$ maximiert. Wenn beispielsweise Papier 1 als risikolos angesehen wird, ist dies gleichbedeutend mit $\sigma_{11}=\sigma_{12}=\sigma_{21}=0$. Jedem μ^* ist daher ein σ^* in Höhe von Null zugeordnet. Die Effizienzkurve fällt mit der μ-Achse zusammen.[4]

Vielfach wird bei der Bestimmung eines optimalen Portefeuilles nur danach gefragt, welche A n t e i l e eines in seiner Höhe nicht weiter interessierenden Geldbetrages für den Erwerb einzelner Papiere aufgewandt werden sollten. Dies impliziert, daß als Argument in die Nutzenfunktion nicht M_2 oder M_2-M_1 eingeht, sondern der Satz mit dem sich ein zu Anfang der Periode vorhandener Betrag verzinst - also $(M_2-M_1)/M_1$ [5].

---

1) Diese Möglichkeit wird auch von G.O.Bierwag and M.A. Grove [12] hervorgehoben.

2) Vgl. oben S. 51 und 57.

3) Wenn man - was bei Risikoscheu notwendig ist - den Koeffizienten des quadratischen Gliedes negativ wählt.

4) Siehe auch G.O. Bierwag and M.A. Grove [12], S. 339.

5) Vgl. Fußnote 1) auf S. 52.

Wenn allein die Anteile als wesentlich angesehen werden, führt eine Verdoppelung von M_1 natürlich automatisch zu einer Verdoppelung des von allen Papieren geplanten Bestands, sofern nur die Preise (Zinssätze) als Daten akzeptiert werden.

Unter diesen Umständen kann ein "point of bliss" nicht existieren.

Gerade beim vorliegenden Problem ist somit eine genaue Kenntnis der jeweiligen Voraussetzungen wichtig. Daher wird auf der folgenden Seite ein (selbstverständlich nicht vollständiger) Überblick über einige wichtige Annahmen gegeben, die der Bestimmung optimaler Portefeuilles bei den genannten Autoren zugrunde liegen.

Bei der Analyse von Royama und Hamada (übrigens auch bei der oben auf S. 41 gebrachten) werden - bis auf die Budgetrestriktion - die gleichen Annahmen gemacht wie bei derjenigen von Bierwag und Grove. Im Prinzip muß deshalb damit gerechnet werden, daß der "point of bliss" innerhalb des durch die Budgetrestriktion abgegrenzten Möglichkeitsgebietes liegen kann. Eine exakte Behandlung der optimalen Portefeuillebestimmung ist daher - wenn von risikolosen Papieren abgesehen wird - nur möglich, indem an die Stelle der Budgetgleichung die Budgetungleichung tritt, was offenbar von Royama und Hamada übersehen wurde.

Insoweit wurden nur alternative Bedingungen angeführt, unter denen der "point of bliss" außer acht gelassen werden kann.

Worauf ist jedoch generell die Möglichkeit seiner Existenz zurückzuführen? Solange der Grenznutzen von M_2 positiv ist - wird man einwenden - kann es in der Realität nicht sinnvoll sein, Papiere, die über einen gewissen Bestand hinausgehen, lieber wegzuwerfen als sie zu halten.

Argument x in der Nutzenfunktion	Es existiert ein risikoloses Papier. Die Verzinsung dieses Papiers ist		Es existiert kein risikoloses Papier
	gleich Null	ungleich Null	
$x = M_2$ Budg.restr. beachtet	Hicks [41], S. 117 3. Alternat.	Sharpe [94] Grossmann 35	Royama and Hamada [84]
Budg.restr. nicht beachtet	---	---	Bierwag and Grove [12]
$x = M_2 - M_1$ Budg.restr. beachtet	Hicks [41], S. 116 2. Alternat.	Hicks [41] S. 107 1. Alternat.	Hicks [41] S. 117 4. Alternat.
Budg.restr. nicht beachtet	---	---	---
$x = \frac{M_2 - M_1}{M_1}$	Markowitz [65] Tobin [111]	Markowitz [65] Lintner [57]	Markowitz [65]

Tabelle 1 [1)]

Der Grund für den scheinbaren Widerspruch liegt darin, daß die in der angeführten μ,σ-Analyse zugelassenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu allgemein sind. In der Regel ordnen sie auch negativen Preisen eine von Null verschiedene Wahrscheinlichkeit zu. Sieht man von einer möglichen Nachschußpflicht und ähnlichem ab, so müssen negative Preise jedoch als unrealistisch ausgeschlossen werden.

Eine Möglichkeit besteht darin, für die Preise am Ende der Periode nur logarithmische Normalverteilungen zuzulassen.

1) Markowitz sagt nicht explizit, von welcher der in den Spalten genannten Voraussetzungen er ausgeht. Nur an einer Stelle ([65], S. 153) wird der Spezialfall eines risikolosen asset erwähnt. Markowitz wird daher in allen drei Spalten aufgeführt.

Eine solche Beschränkung der Menge der Wahrscheinlichkeitsverteilungen hat, wie erwähnt[1], bestimmte Implikationen für die bei Gültigkeit des Bernoulli-Prinzips als rational in Betracht kommenden Nutzen- und Präferenzfunktionen.

Schneeweiß[2] nennt eine Möglichkeit, die wir zugrunde legen wollen:

Zu den Nutzenfunktionen

(69) $U(M_2) = -M_2^{-a}$, $M_2 > 0$ falls $a > 0$ und

(70) $U(M_2) = M_2^{-a}$, $M_2 > 0$ falls $a < 0$

gehört bei $a > -2$ die Präferenzfunktion

$$(71)\quad \Psi(m,s^2) = \frac{m}{\left[m^2+s^2\right]^{\frac{c}{2}}}$$

mit $c = \frac{1+a}{2+a}$; m = Erwartungswert von M_2 bei logarithmischer Normalverteilung

s = Standardabweichung von M_2 bei logarithmischer Normalverteilung

Wenn die Möglichkeit negativer Preise den Grund für die Existenz eines "point of bliss" bildet, muß sich zeigen lassen, daß bei Benutzung von (71) kein endlicher Vektor η den Ausdruck

$$E\left[U(M_2(\eta))\right] = \Psi(m(\eta),s^2(\eta)) = \frac{m(\eta)}{\left[m(\eta)^2+s(\eta)^2\right]^{\frac{c}{2}}}$$

maximiert.

---

1) Vgl. S. 46, Fußnote 2.

2) H. Schneeweiß [98], S. 163.

Hierzu beachten wir folgendes. Auf S. 52 f. wurde gezeigt, daß die Effizienzkurve $\sigma^* = \sigma^*(\mu^*)$ eine Gerade durch den Ursprung darstellt, wenn für η keine Restriktionen gelten und kein risikoloses Papier existiert[1]. Für die zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsverteilung wurde nur die Annahme gemacht, daß sie durch μ und σ bereits vollständig beschrieben werden kann.

Auch die logarithmische Normalverteilung ist mit m und s eindeutig bestimmt. Die Analyse im m,s-Diagramm stellt insofern nur einen Spezialfall der Analyse im μ,σ-Diagramm dar. Für die Effizienzkurve bedeutet dies, daß sie unter den gleichen Bedingungen ebenfalls als Gerade durch den Ursprung gezeichnet werden kann.

Die Präferenzfunktion (71) weist jedoch eine besondere Form auf.

Beschränken wir uns auf den Fall a>0 (d.h. auf eine konkav ansteigende Nutzenfunktion), so gilt:

Aus $\psi(m,s^2) = \dfrac{m}{\left[m^2+s^2\right]^{\frac{c}{2}}} = k = \text{konstant}$ folgt

(72) $s = \left[\alpha m^{\frac{2}{c}} - m^2\right]^{\frac{1}{2}}$ mit $\alpha = \left[\frac{1}{k}\right]^{\frac{2}{c}}$

und $\frac{1}{2}<c<1$

s ist reell für

(73) $m > \dfrac{1}{\left[\alpha\right]^{\frac{c}{2(1-c)}}}$ und für $m = 0$.

---

1) Restriktionen für η bewirken, daß die Effizienzkurve konvex zur μ-Achse verläuft. Unter Umständen gibt es lineare Teilabschnitte, so z.B. dann, wenn ein risikoloses Papier existiert. In diesem Fall ist die Effizienzkurve - wie auf S. 52 f. gezeigt wurde - sogar im ganzen Bereich linear, wenn außer der Budgetbeschränkung keine weiteren Restriktionen vorliegen (wie etwa die Forderung der Nichtnegativität). Vgl. hierzu H.M.Markowitz [65], S. 153.

Für die Ableitung von s nach m ergibt sich:

$$(74) \qquad \frac{ds}{dm} = \frac{\frac{\alpha}{c} m^{\frac{2}{c}-1} - m}{\left[\alpha m^{\frac{2}{c}} - m^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$\frac{ds}{dm}$ ist positiv für $m > \left[\frac{c}{\alpha}\right]^{\frac{c}{2(1-c)}}$

Da im reellen Bereich (mit $m \neq 0$)

$$m > \frac{1}{\left[\alpha\right]^{\frac{c}{2(1-c)}}} > \left[\frac{c}{\alpha}\right]^{\frac{c}{2(1-c)}}.$$

ist $\frac{ds}{dm}$ dort positiv.

Für die zweite Ableitung von s nach m gilt:

$$(75) \qquad \frac{d^2s}{dm^2} \gtrless 0 \qquad \text{genau dann, wenn}$$

$$m \gtrless \left[\frac{2+c^2-3c}{(1-c)}\right]^{\frac{c}{2(1-c)}}$$

Man erkennt, daß wegen $\left[\frac{2+c^2-3c}{1-c}\right]^{\frac{c}{2(1-c)}} > 1$

$$(76) \qquad m_2 = \left[\frac{2+c^2-3c}{\alpha(1-c)}\right]^{\frac{c}{2(1-c)}} > m_1 = \frac{1}{\left[\alpha\right]^{\frac{c}{2(1-c)}}}$$

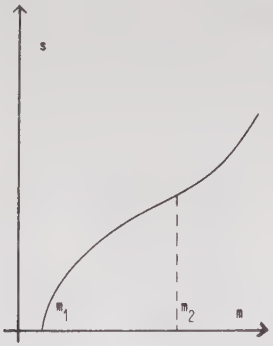
Die Kurve $s = s(m)$ besitzt also für $m_2 > m > m_1$ einen zur m-Achse konkaven und für $m > m_2$ einen konvexen Verlauf.

Aus (74) folgt schließlich

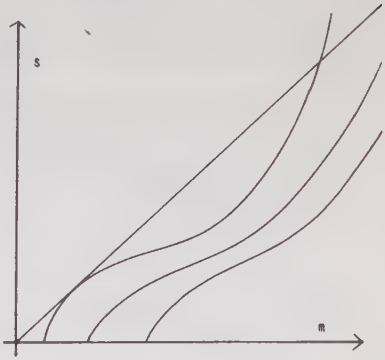
$$(77) \qquad \lim_{m \to \infty} \frac{ds}{dm} = \infty \qquad \text{und}$$

$$(78)\quad \lim_{\substack{m \to m_1 \\ m > m_1}} \frac{ds}{dm} = \infty$$

so daß s = s(m) wie in Figur 6 abgebildet werden kann.



Figur 6



Figur 7

Die Zusammenfassung von Effizienzkurve und Indifferenzkurvenfeld zeigt Figur 7.

Wesentlich hieran ist folgendes: Wegen (77) schneidet jede Effizienzkurve das Indifferenzkurvenfeld. Es gibt also auf der Effizienzkurve keinen Punkt, der allen anderen vorgezogen wird - es existiert, wie vermutet, kein "point of bliss".

Es kann sein, daß sich Effizienz- und Indifferenzkurve in einem bestimmten Punkt tangieren. Doch handelt es sich in diesem Fall jeweils nur um ein lokales Optimum.

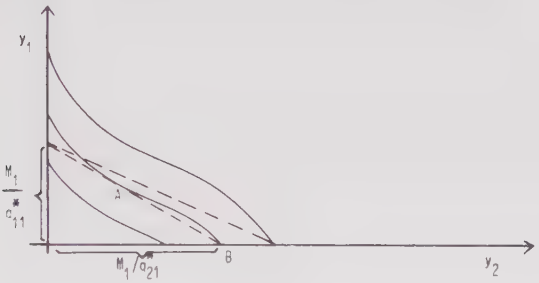
Eine Beweisführung, die der auf S. 56 f. dargestellten völlig entspricht, zeigt, daß die aus $\Psi(m,s) = k$ hergeleiteten Indifferenzkurven im y_1,y_2-Diagramm teils konkav,teils konvex zum Ursprung gekrümmt sind.

Dies wird in Figur 8 verdeutlicht.

Figur 8

Somit ist zwar erreicht worden, daß ein "point of bliss" nicht existiert. Doch war der Preis im Fall der Präferenzfunktion (71) der, daß die Indifferenzkurven im y_1,y_2-Diagramm nicht mehr den üblicherweise postulierten konvexen Verlauf haben.

Berücksichtigen wir im y_1,y_2-Diagramm nunmehr die Budgetrestriktion, so erkennt man aus Figur 9, daß die optimale Lösung unter dieser Nebenbedingung mehrdeutig sein kann. Die den Punkten A und B entsprechenden Portefeuilles werden gleich hoch eingeschätzt.



Figur 9

Zum anderen erfolgt bei einer Senkung von q_{21} unter q^*_{21} keine kontinuierliche Substitution von y_1 durch y_2; der Investor wählt vielmehr bei jedem $q_{21} < q^*_{21}$ ein Portefeuille, das ausschließlich y_2 enthält. Seine Nachfragefunktionen nach y_1 und y_2 weisen an dieser Stelle eine Unstetigkeit auf. - Es soll angemerkt werden, daß die Indifferenzkurve $s = s(m)$ (siehe Figur 6) für $m > m_2$ der des "plungers" (Tobin[1]) entspricht,

1) J. Tobin [111], S. 11.

dessen Existenz Tobin jedoch für nicht erwiesen hält[1]. Ja, er schreibt an anderer Stelle[2]: "All risk-averters are diversifiers; plungers do not exist." Beachtet man, daß die hier verwandte Nutzenfunktion (69) den für den "risk-averter" typischen konkaven Verlauf hat[3], und daß $s = s(m)$ bei $m > m_2$ dennoch konvex ist, so ist leicht zu sehen, daß die Feststellung Tobins nicht generell richtig sein kann.

Der Grund hierfür ist in folgendem zu suchen: Tobin will beweisen, daß von der Konkavität der Nutzenfunktion immer dann auf die Konkavität der Indifferenzkurven im μ,σ-Diagramm geschlossen werden kann, wenn die zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen einer μ,σ-Klasse angehören. Schneeweiß[4] hat indessen gezeigt, daß eine solche Aussage nur dann gilt, wenn die Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu einer l i n e a r e n μ,σ-Klasse zählen - was bei der hier benutzten logarithmischen Normalverteilung nicht der Fall ist.

Die obigen Überlegungen wurden für den speziellen Fall der Funktionen (69) und (71) angestellt. Um generelle Aussagen machen zu können, müßten alle Präferenzfunktionen untersucht werden, die bei logarithmischer Normalverteilung rational sind. Daß einige unter ihnen zu Indifferenzkurven führen, die überall im m,s-Diagramm konkav zur m-Achse verlaufen, darf nicht von vornherein ausgeschlossen werden. Freilich müßte dann die Frage nach dem "point of bliss" von neuem überprüft werden.

Hierauf wird jedoch nicht weiter eingegangen.

---

1) J. Tobin [111], S. 16.

2) ebenda, S. 14.

3) Vgl. oben S. 38, Fußnote 1).

4) H. Schneeweiß [98], S. 125 f. Zum Begriff der linearen μ,σ-Klasse siehe H. Schneeweiß [98], S. 121 f.

7.3.4. μ,σ-Analyse und die Bestimmung der optimalen Bilanzlänge

Bisher war nur untersucht worden, wie ein gegebener Betrag M_1 optimal angelegt werden soll. In der Regel ist dies nicht die einzige Frage. Es muß auch geklärt werden, wieviel Kredit aufzunehmen ist. Neben die Frage der optimalen Bilanzstruktur tritt die der optimalen Bilanzlänge - ein Problem übrigens, das von den in der letzten Zeile der Tabelle 1 aufgeführten Autoren bereits vom Ansatz her undiskutiert bleibt. Es zeigt sich, daß bereits mit einer sehr einfachen Interpretation auch die optimale Bilanzlänge mit Hilfe von μ,σ-Prinzipien bestimmt werden kann.

Denken wir uns einen Investor, der folgender Situation gegenüber steht:

a. Er besitzt E_1 DM Eigenkapital.

b. Er kann unter Berücksichtigung der Budgetrestriktion n verschiedene Papiere zum heutigen Preis q_{i1} (i=1,...,n) erwerben. Der Vektor der erwarteten Preise am Ende der Periode sei wie bisher $\bar{\eta}_2$ und die Kovarianzmatrix $[\sigma_{ij}]$.

c. Durch Emission von maximal $\bar{y}_{n+1}$ Schuldpapieren des Typs n+1 zum Preis von $q_{n+1,1}$ pro Stück kann er sich Fremdkapital in Höhe von $\bar{F} = \bar{y}_{n+1} \cdot q_{n+1,1}$ beschaffen. Diese Papiere müssen am Ende der Periode zum Preis von $q_{n+1,2}$ pro Stück eingelöst werden. Das Reinvermögen am Ende der Periode wird definiert als

$$E_2 = \sum_{i=1}^{n} y_i q_{i2} - y_{n+1} q_{n+1,2} \quad .$$

E_2 ist eine Zufallsvariable.

Das Ziel des Investors sei es, den erwarteten Nutzen über E_2 zu maximieren, wobei sich für ihn insbesondere die Frage stellt, inwieweit er von der gegebenen Verschuldungsmöglichkeit Gebrauch machen soll. Zur

Beantwortung dieses Problems scheint eine andere Charakterisierung der geschilderten Situation vorteilhaft[1].

Wir nehmen an, der Investor verschuldet sich im Zeitpunkt 1 auf jeden Fall in Höhe von DM $\overline{F} = \overline{y}_{n+1} q_{n+1,1}$. Bei der optimalen Anlage von nunmehr $M_1 = E_1 + \overline{F}$ wird ihm zusätzlich die Möglichkeit geboten, neben Papieren des Typs i (i=1,...,n) solche der Art n+1, d.h. seine eigenen Schuldpapiere zu erwerben. Der Kauf dieser Papiere im Zeitpunkt 1 läßt sich als Nichtverschuldung auffassen. Wird M_1 angelegt und gilt für das optimale Portfeuille $y_{n+1} = y^*_{n+1}$, so stellt also $(\overline{y}_{n+1} - y^*_{n+1}) q_{n+1,1}$ die optimale Kreditaufnahme dar.

Die Verallgemeinerung auf m Verschuldungsmöglichkeiten bietet nichts besonderes. Der Investor steht in diesem Fall vor der Aufgabe, $M_1 = E_1 + \sum_{k=1}^{m} y_{n+k} q_{n+k,1}$ optimal anzulegen, wobei er neben Papieren des Typs 1 bis n eben auch solche der Art n+k(k=1,...,m) bis zum jeweils maximalen Umfang $\overline{y}_{n+k}$ für den Preis $q_{n+k,1}$ erwerben kann.

Die optimale Bilanzlänge wird bei einem solchen Ansatz simultan mit der optimalen Bilanzstruktur bestimmt. Es ergeben sich keinerlei neue Probleme. Rein rechentechnisch kann vor allem die Möglichkeit genutzt werden, daß Markowitz[2] Lösungen für die Ermittlung der Effizienzkurve auch dann angegeben hat, wenn η linearen Ungleichungen unterworfen ist. Das ist hier wegen $y_{n+k} \leq \overline{y}_{n+k}$ (k=1,...,m) von Bedeutung.

---

1) Bei nur einer Verschuldungsmöglichkeit ist diese Umformulierung keineswegs erforderlich. Sie ist aber dann vorteilhaft, wenn mehrere Verschuldungsmöglichkeiten mit fixierten Höchstgrenzen und eventuellen sonstigen Einschränkungen betrachtet werden. Insbesondere ist auch der unten erwähnte Fall des freihändigen Rückkaufs hervorzuheben.

2) H.M. Markowitz [65], S. 3o9 ff.

Schließlich ist der Fall hervorzuheben, in dem $q_{n+1,2}$ nicht genau fixiert wird, sondern gewissen Schwankungen unterliegt. Man denke z.B. an den freihändigen Rückkauf von Obligationen. Eine solche Situation läßt sich in der angegebenen Weise besonders einfach berücksichtigen.

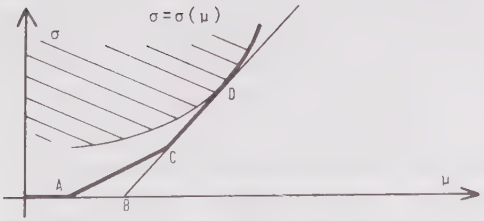
Ist andererseits $q_{n+1,2}$ festgelegt, so stellt das Halten von y_{n+1} - d.h. die Nichtverschuldung in diesem Umfang - eine sichere und im allgemeinen ($q_{n+1,2} > q_{n+1,1}$) zinsbringende Anlagemöglichkeit dar. In diesem Modell ist daher eine Portefeuillekombination, die gleichzeitig die Inanspruchnahme des Kredits vom Typ n+1 und das Halten von Kasse vorsieht, ineffizient.
Wir wollen die optimale Prtefeuillebestimmung unter den Voraussetzungen a. bis c. graphisch erläutern. Zusätzlich sei angenommen, daß das Papier 1 (Kasse) risikolos, die Papiere 2 bis n aber risikabel sind.
Es bezeichnet:

$M_2 = \sum_{i=1}^{n+1} y_i q_{i,2}$ das Bruttovermögen im Zeitpunkt 2[1)]

$\mu = E[M_2]$ den Erwartungswert von M_2

σ die Standardabweichung von M_2

$\sigma = \sigma(\mu)$ die Kurve der effizienten μ, σ-Kombinationen, wenn $M_1 = E_1 + \overline{F}$ ausschließlich in risikablen Papieren des Typs 2 bis n angelegt wird.



Figur 1o

1) Dabei wird von der Annahme Gebrauch gemacht, daß sich der Investor zu Beginn der Periode im Umfang von $\overline{F} = \overline{y}_{n+1} q_{n+1,1}$ verschuldet.

$B=(M_1 \frac{q_{n+1,2}}{q_{n+1,1}};0)$ bezeichnet denjenigen Punkt der μ-Achse, bei dem M_1 ausschließlich zum Erwerb von Schuldpapieren benutzt wird ($q_{n+1,2}$ wird als fest vorgegeben angenommen). Wegen

$$y_{n+1} < \bar{y}_{n+1} < \frac{M_1}{q_{n+1,1}}$$

ist dieser Punkt bei $E_1 > 0$ tatsächlich nicht realisierbar.

$A=(E_1+\bar{y}_{n+1}q_{n+1,2};0)$ bezeichnet die folgender Entscheidung entsprechende μ,σ-Kombination: E_1 wird als Kasse gehalten, und es wird kein Kredit aufgenommen. A ist effizient, denn es kann kein größeres μ bei $\sigma = 0$ erreicht werden.

D bezeichnet den Berührungspunkt einer von B an die Kurve $\sigma = \sigma(\mu)$ gezogenen Tangente.

C bezeichnet eine konvexe Kombination $\vartheta B+(1-\vartheta)D$ mit $\vartheta = \frac{\bar{F}}{E_1+\bar{F}} = \frac{\bar{F}}{M_1}$.

Sieht man von der Restriktion $y_{n+1} \leqq \bar{y}_{n+1} \leqq \frac{M_1}{q_{n+1,1}}$ zunächst einmal ab, so läßt sich mit B auch jede konvexe Kombination von B mit einem bei ausschließlich risikabler Anlage erreichbaren Punkt verwirklichen. Von ihnen sind nur jene effizient, die auf der Geraden $\overline{BD}$ liegen[1]. Die Beachtung von $y_{n+1} \leqq \bar{y}_{n+1}$ zeigt jedoch, daß nicht alle Punkte dieser Geraden zulässig sind. Wie man aus der Definition von C erkennt, gehören von ihr nur die Punkte der Strecke $\overline{CD}$ zum Möglichkeitsgebiet.

Weiterhin kann A erreicht werden. Folglich sind alle konvexen Kombinationen von und C sowie die links

---

1) Vgl. hierzu die Darstellung bei J. Lintner [57], S. 679, [56], S. 59 ff. und W.F. Sharpe [94], S. 66o f.

von ihnen liegenden Punkte realisierbar[1]. Die Effizienzkurve bei gleichzeitiger Berücksichtigung von sicheren und risikablen Anlagemöglichkeiten ist also unterhalb von D durch den Streckenzug OACD gegeben. Oberhalb von D fällt sie mit $\sigma = \sigma(\mu)$ zusammen.

Der Tangentialpunkt dieser so ermittelten Effizienzkurve mit einer Indifferenzkurve kennzeichnet optimale Bilanzlänge und Bilanzstruktur. Wird etwa ein zwischen C und D liegender Berührungspunkt angenommen, so lautet die Portefeuilleentscheidung: Es soll keine Kasse gehalten, nur ein Teil der Verschuldungsmöglichkeiten genutzt, und der Gesamtbetrag von Eigenkapital und aufgenommenem Kredit in der dem Punkt D entsprechenden Zusammensetzung angelegt werden. Analog sind andere Punkte zu interpretieren.

Freilich muß eine wichtige Einschränkung beachtet werden. Es war vorausgesetzt worden, daß die verschiedenen Finanzierungsformen Daten des Problems sind. Die Möglichkeit, zum Preis von $q_{\underline{n+1},1}$ (bzw. $q_{n+k,\underline{1}}$; $k=1,\ldots,m$) Schuldpapiere $y_{n+1} \leqq \overline{y}_{n+1}$ (bzw. $y_{n+k} \leqq \overline{y}_{n+k}$) zu emittieren, wurde nicht davon beeinflußt, welche Portefeuillekombination der Investor verwirklichte. In der Realität gilt dies keineswegs uneingeschränkt. Auch der Gläubiger geht ein Verlustrisiko ein, wenn sein Schuldner allzu risikofreudig ist[2]. Um also überhaupt Kreditgeber zu finden, ist ein Investor gezwungen, seine Solvenz zu gewährleisten. Auf dieses Problem soll im folgenden Abschnitt eingegangen werden.

---

1) Wenn die Gerade AC nicht völlig unterhalb von $\sigma=\sigma(\mu)$ liegt, wird die graphische Darstellung komplizierter. An der Berechnungsmöglichkeit ändert dies freilich nichts.

2) Unter Umständen ist der Schuldner nicht in der Lage, den Kredit zurückzuzahlen.

7.3.5. μ,σ-Analyse und die Restriktion der Liquiditätssicherung

Es gibt zahlreiche Regeln, die die Liquidität sichern sollen[1]. Hier wird von folgendem Ansatz ausgegangen:

Der Investor muß mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit garantieren können, daß $M_2 \geq \overline{F}$. Diese Forderung entspricht einem wesentlichen Element der von Stützel[2] entwickelten Maximalbelastungstheorie[3]. Wir nehmen an, daß M_2 normalverteilt ist[4]. Die spezielle Normalverteilung ist durch die für das optimale Portefeuille gewählte μ,σ-Kombination gekennzeichnet. Unter dieser Voraussetzung kann gesagt werden, daß M_2 mit einer von k eindeutig abhängigen Wahrscheinlichkeit größer als $\mu - k\sigma$ ist[5]. Soll nun mit vorgegebener

---

1) Einen umfangreichen Überblick bietet z.B. H. Hoffmann [45]

2) W. Stützel [103] , S. 39 ff.; [104] , S. 34 ff.

3) Eine knappe Skizzierung findet sich bei H. Hoffmann, [45] , S. 86 f.:" STÜTZEL ... schlägt vor, durch spezifische Bewertungen und Ergänzungen aus der Handelsbilanz eine Sonderbilanz zu entwickeln, die dem Schutz der Bankgläubiger dienen soll. Diese 'Einlegerschutzbilanz' solle unter der Annahme aufgestellt werden, daß alle Bankgläubiger ihre Mittel zu den vereinbarten Fälligkeiten tatsächlich abziehen (in 7.3.4. wird davon ausgegangen, daß die Kredite im Zeitpunkt 2 - d.h. am Ende der Periode - zurückgezahlt werden müssen. Anm.d.Verf.), ... Entsprechend seien auf der Aktivseite der Sonderbilanz als Wertansätze die Liquidationswerte anzusetzen, die in diesem Belastungsfall ... realisiert werden könnten (in 7.3.4. entsprechen den Liquidationswerten die Größen q_{12}. Anm.d.Verf.). Das Ergebnis dieser Bewertung sei also ein potentieller Liquidationsstatus, die sog. "Solvabilitätsbilanz". STÜTZEL präzisiert seine Dispositionsregel im Hinblick auf diesen Status und fordert:'Die Anlagepolitik muß stets so betrieben werden, daß das Risiko, in eine Situation zu geraten, in der die Solvabilitätsbilanz keinen Überschuß mehr aufweist, mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit ausgeschlossen bleibt'."

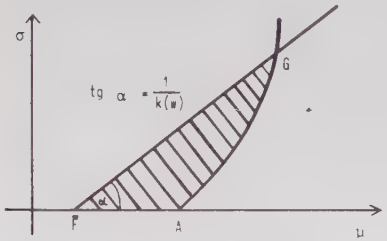
4) Der zentrale Grenzwertsatz sichert, daß dies auf jeden Fall als Annäherung richtig ist. Siehe M.G.Kendall and A. Stuart [48] , S. 193.

5) Für k=1 z.B. ist diese Wahrscheinlichkeit 0,8413, für k=2 0,9772 usw., wie sich aus jeder Tabelle für Normalverteilungen ablesen läßt.

Wahrscheinlichkeit w gewährleistet werden, daß $M_2 \geq \overline{F}$, so muß gelten:

(79) $\mu - k(w)\sigma \geq \overline{F}$ bzw. $\sigma \leq -\frac{\overline{F}}{k(w)} + \frac{\mu}{k(w)}$ mit $k'(w) > 0$.

Tragen wir die Restriktion (79) zusammen mit einer zur μ-Achse konvexen Effizienzkurve in das Diagramm der Figur 11 ein,



Figur 11

so erkennt man, daß die gewünschte Liquiditätssicherung die Menge der zulässigen μ,σ-Kombinationen auf den schraffierten Bereich beschränkt. Nur der Teilabschnitt $\overline{F}AG$ der Begrenzungskurve kommt als gleichzeitig zulässig und effizient in Betracht.

Bei einer Vergrößerung der Wahrscheinlichkeit w, mit der Zahlungsunfähigkeit ausgeschlossen werden soll, steigt k. Die durch $\overline{F}$ verlaufende Gerade wird folglich flacher und der noch als zulässig erkannte Bereich eingeengt.

Es ist interessant, eine solche Überlegung mit einigen in der Literatur behandelten Ansätzen zu vergleichen. Von Allais[1] und Thomas[2] wird der Ausdruck $\mu - k\sigma$ als Präferenzfunktion eingeführt. Ist k gegeben, und wird die Effizienzkurve mit $\sigma = \sigma(\mu)$ bezeichnet, so führt die Maximierung von $\Psi(\mu, \sigma) = \mu - k\sigma(\mu)$ zu folgender Entscheidungsregel:
Es ist diejenige μ,σ-Kombination auf der Effizienzkurve zu wählen, für die $\sigma'(\mu) = \frac{1}{k}$.

---

1) M. Allais [3].
2) H.A. Thomas, Jr. [107].

Wir brauchen hierauf nicht weiter einzugehen, da Schneeweiß[1] gezeigt hat, daß eine solche Präferenzfunktion auch auf der Klasse der Normalverteilungen nicht rational ist.

Baumol[2] führt eine ähnliche Überlegung an, ist jedoch in einer Hinsicht vorsichtiger. Er sagt nicht, daß diejenige μ,σ-Kombination mit $\sigma'(\mu) = \frac{1}{k}$ verwirklicht werden soll; doch will er alle Kombinationen mit $\sigma'(\mu) < \frac{1}{k}$ als für die Entscheidung irrelevant ausgeschlossen wissen. Er gibt also ein Entscheidungsprinzip, nicht eine Entscheidungsregel[3] an.

Dieses läßt sich auf andere Weise wie folgt formulieren: Von allen μ,σ-Kombinationen, die den gleichen Wert $\mu-k\sigma$ liefern, darf für die endgültige Entscheidung nur die mit dem maximalen μ in Betracht gezogen werden. Es liegt demnach eine Einengung der zu wählenden μ,σ-Kombinationen vor, die schärfer ist als die Forderung nach Effizienz in der auf S. 48 angegebenen Interpretation. Jedoch handelt es sich im allgemeinen nicht um die Reduktion auf eine einzige Möglichkeit.

Insofern scheint eine gewisse Ähnlichkeit zur oben angeführten Restriktion (79) gegeben zu sein. Tatsächlich ist der Charakter beider Einschränkungen grundverschieden.

---

1) H. Schneeweiß [98] , S. 148 f.

2) W. J. Baumol [9].

3) "Entscheidungskriterien sind Richtlinien, die der Entscheidende beim Auswählen der optimalen Aktion befolgt. Sie sind in ihrer stärksten Form (I) Entscheidungsregeln, die zu jedem Entscheidungsproblem die optimalen Aktionen (die dann ihrerseits einander indifferent sind) eindeutig angeben bzw. zu errechnen gestatten und damit das Entscheidungsproblem lösen. Sie sind in abgeschwächter Form (II) Entscheidungsprinzipien, die keine Optimallösung anbieten, sondern nur die Willkür in der Auswahl der optimalen Aktion einschränken." H. Schneeweiß [98] , S. 17.

(79) soll gewährleisten, daß mit einer an Sicherheit grenzenden Wahrscheinlichkeit das Vermögen am Ende der Periode (M_2) zur Tilgung der Schulden ($\overline{F}$) ausreicht. Was unter einer an Sicherheit grenzenden Wahrscheinlichkeit verstanden wird, ist nicht eindeutig. Man wird an eine solche von 95 %, 99 % oder 99,999 % denken können. Jedenfalls ist die gewählte Wahrscheinlichkeit w keine Größe, die in das persönliche Belieben des Investors gestellt ist, und die seiner Risikoneigung Rechnung tragen soll, sondern ein Wert, der sich aus der herrschenden Auffassung darüber ergibt, wie streng der Grundsatz der Vertragstreue (aufgenommene Kredite müssen zurückgezahlt werden) auszulegen ist. Es handelt sich also um eine dem Investor von außen auferlegte Beschränkung. (79) kann daher am ehesten mit einer Budgetrestriktion verglichen werden.

Anders der Ansatz von Baumol. Dies wird an einem Zitat deutlich, das sich auf die unten wiedergegebene Tabelle bezieht[1]:

> "... if we take $E+\sigma$ and $E-\sigma$ as a sort of upper and lower confidence limit, that is, if $E-\sigma$ is considered the (equally likely) lowest plausible outcome for each investment and $E+\sigma$ is the highest plausible outcome for each investment it may well be questioned whether anyone in his right mind would ever choose portfolio A. For the worst anticipated outcome associated with B, $E_b-\sigma_b = 11$ is better than the highest plausible outcome for $A = E_a+\sigma_a = 1o$!"

	E	σ	$E+\sigma$	$E-\sigma$
A	8	2	1o	6
B	15	4	19	11

Es handelt sich also um eine Vorentscheidung, die jeder "rational" Handelnde bei der Auswahl von Portefeuilles treffen sollte.

1) W. J. Baumol [9] , S. 384.

Welches sind die unterschiedlichen Konsequenzen dieser Vorentscheidung einerseits und des dargestellten Ansatzes zur Liquiditätssicherung anderseits?

a. Die Bedingung (79) schließt alle Portefeuilles aus der Betrachtung aus, die o b e r h a l b eines bestimmten Punktes auf der Effizienzkurve liegen. Baumol hingegen empfiehlt, die μ,σ-Kombinationen u n t e r h a l b eines bestimmten Punktes zu vernachlässigen.

b. Die Erhöhung von k verengt bei Gültigkeit von (79) den Entscheidungsspielraum. Bei Baumol erweitert sie ihn.

c. Die Restriktion (79) kann bei jeder rationalen Präferenzfunktion $\Psi(\mu,\sigma)$ eingeführt werden. Tangiert eine Indifferenzkurve außerhalb des nunmehr eingeschränkten Zulässigkeitsbereichs, so wird das Randoptimum verwirklicht. Bei Baumol hingegen bedeutet ein Tangentialpunkt außerhalb des von ihm als relevant angesehenen Abschnitts der Effizienzkurve, daß die benutzte Präferenzfunktion $\Psi(\mu,\sigma)$ "unrational" (in seinem Sinne) ist. Nach dem von ihm angegebenen Kriterium kommen also keineswegs mehr alle Präferenzfunktionen über μ und σ in Betracht, die nach dem Bernoulli-Prinzip auf der Klasse der Normalverteilungen rational sind. Der Grund liegt darin, daß mit seiner Vorentscheidung für die Indifferenzkurven eine spezifische Eigenschaft impliziert wird: sie dürfen nirgends eine geringere Steigung als $\frac{1}{k}$ aufweisen. Andernfalls wäre es bei geeignetem Effizienzkurvenverlauf denkbar, daß sich Effizienz- und Indifferenzkurve in einem Punkt mit $\sigma'(\mu) < \frac{1}{k}$ tangieren, was nach Baumol bei "rationaler" Entscheidung für die optimale μ,σ-Kombination nicht gelten darf.

Es ist interessant zu sehen, daß keine der folgenden Präferenzfunktionen (8o) - (83) diese Bedingung

erfüllt, obwohl sie alle auf der Klasse der Normalverteilungen als rational im Sinne des Bernoulli-Prinzips nachgewiesen wurden - (8o) sogar auf der Klasse aller Wahrscheinlichkeitsverteilungen, für die μ und σ existieren.[1)]

(8o) $\Psi(\mu,\sigma) = a_1\mu + a_2(\mu^2+\sigma^2)$ $\quad a_1 > 0;\ a_2 < 0$

(81) $\Psi(\mu,\sigma) = \mu - a\sigma^2$ $\quad a > 0$

(82) $\Psi(\mu,\sigma) = \frac{\mu}{\sigma}$

(83) $\Psi(\mu,\sigma) = \frac{\mu}{\sqrt{\sigma^2+a}}$ $\quad a > 0$

Hingegen entspricht die ausgeartete aber ebenfalls (gemäß dem Bernoulli-Prinzip) rationale Präferenzfunktion

(84) $\Psi(\mu,\sigma) = \mu$

Baumols Forderung.

Dies ist nicht überraschend, wenn man darauf achtet, daß die Baumol'sche Vorentscheidung eine Korrektur des μ,σ-Prinzips zum μ-Prinzip hin beinhaltet: Sinkendes k bewirkt nach Baumol eine Verringerung des noch als relevant angesehenen Bereichs der Effizienzkurve. Die μ,σ-Kombinationen werden tendenziell stärker nach der μ-Komponente beurteilt. Für $k \to 0$ verdichtet sich die Baumol'sche Vorentscheidung zum reinen μ-Prinzip.

Man kann sich fragen, ob durch eine solche Beschränkung des ohnedies recht starren μ,σ-Prinzips wirklich etwas gewonnen wird.

Es soll festgehalten werden, daß Baumol selbst keine Präferenzfunktion angibt, die seiner Einschränkung entspricht und gleichzeitig auf der Klasse der Normalverteilungen im Sinne des Bernoulli-Prinzips rational ist.

7.4. Das Problem der Portefeuillebestimmung bei schwankenden Einlagen

Neben dem aus Preisschwankungen der Aktiva resultierenden Liquiditätsproblem besteht insbesondere bei Banken

1) H. Schneeweiß [98], S. 96, S. 146 und S. 155 ff.

ein weiteres, das durch die wechselnde Höhe der Einlagen bedingt ist.

Für die Portefeuillebestimmung ist folgende Tendenz von Bedeutung. Hochverzinsliche Papiere - die man also gerne halten möchte - lassen sich kurzfristig oft nur mit Verlust verkaufen. Ihr Anteil an den Gesamtaktiva darf daher nicht zu groß sein, wenn man an die möglichen Abzüge von Einlagen denkt.

Wie sieht unter diesen Bedingungen ein Optimum aus? Zur Beantwortung legen wir folgende Annahmen zugrunde:
a. Es gibt zwei Papiere. Das erste kann zum Preis q_{11} ge- und verkauft werden. Das zweite wird zum Preis q_{21} erworben, läßt sich aber innerhalb kurzer Zeit nur zum Preis $q_{21}^v < q_{21}$ verkaufen; q_{12}, q_{21}^v und q_{22} seien mit Sicherheit erwartete Größen.
b. Im Zeitpunkt 1 stehen dem Investor M_1^o DM zur Verfügung, die er zum Erwerb von y_1 (bzw. y_2) Einheiten des Papiers Nr. 1 (bzw. Nr. 2) verwendet. Unmittelbar danach - d.h. auch zu Beginn der Periode - treffen die Einleger ihre Entscheidung über die Höhe von M_1. - Es wird angenommen, daß M_1 um M_1^o normalverteilt ist[1].

---

1) Von H. Hoffmann ([45], S. 78 ff.) und W. Stützel ([1o4], S. 41) wird betont, daß man hiervon gerade nicht ausgehen dürfe, da die Unabhängigkeit der Einzelereignisse (Kunden lassen sich ihre Guthaben in bar auszahlen oder erhöhen ihre Einlagen) nicht gewährleistet sei. Nimmt man jedoch an, daß die Vorschläge Stützels ([1o3], S. 39 ff.) zur Solvenzsicherung befolgt werden, und dies bei den Kunden hinreichend bekannt ist, so besteht kein Grund dafür, daß sich ein Kunde seine Beträge auszahlen läßt, nur weil es vor ihm bereits andere getan haben. In diesem Fall ist es sinnvoll, die Unabhängigkeit der Einzelereignisse zu unterstellen. Streng genommen müßte daher die folgende Maximierungsaufgabe unter der Nebenbedingung gelöst werden, daß von Papier 2 nur ein von der Maximalbelastungstheorie vorgeschriebener Höchstbetrag erworben werden darf.

Für das Reinvermögen E_2 am Ende der Periode gilt unter diesen Voraussetzungen[1]:

(85) Aus $M_1 \geq q_{21}y_2$ folgt $E_2 = (M_1 - q_{21}y_2)\frac{q_{12}}{q_{11}} + y_2 q_{22} - M_1$

(86) Aus $M_1 < q_{21}y_2$ folgt $E_2 = (M_1 + y_2(q_{21}^v - q_{21}))\frac{q_{22}}{q_{21}^v} - M_1$

c. Das Ziel des Investors (z.B. einer Kreditbank) bestehe darin, den erwarteten Nutzen über E_2 zu maximieren. Der Einfachheit halber wird eine lineare Nutzenfunktion unterstellt[2].
Es gilt:

$$(87)\quad E[E_2] = \int_{-\infty}^{q_{21}y_2} \left[\frac{q_{22}}{q_{21}^v}(M_1 + y_2(q_{21}^v - q_{21})) - M_1\right] \phi(M_1)\,dM_1$$

$$+ \int_{q_{21}y_2}^{\infty} \left[(M_1 - q_{21}y_2)\frac{q_{12}}{q_{11}} + y_2 q_{22} - M_1\right] \phi(M_1)\,dM_1 \quad \text{bzw.}$$

$$(88)\quad E[E_2] = \left(\frac{q_{22}}{q_{21}^v} - 1\right) \int_{-\infty}^{q_{21}y_2} M_1 \phi(M_1)\,dM_1 + \left(\frac{q_{12}}{q_{11}} - 1\right) \int_{q_{21}y_2}^{\infty} M_1 \phi(M_1)\,dM_1$$

$$+ y_2 q_{21}\left(\frac{q_{12}}{q_{11}} - \frac{q_{22}}{q_{21}^v}\right) \int_{-\infty}^{q_{21}y_2} \phi(M_1)\,dM_1 + y_2(q_{22} - q_{21}\frac{q_{12}}{q_{11}}) \,.$$

---

1) Dabei wird angenommen, daß der Investor sein Portefeuille bei $M_1 < M_1^o$ in folgender Form umstrukturiert: Wenn $M_1 = q_{21}y_2$, deckt er die Differenz zwischen M_1 und M_1^o ausschließlich durch den Verkauf von Wertpapieren des Typs 1. Wenn $M_1 < q_{21}y_2$, wird neben allen Papieren des Typs 1 auch ein Teil der Papiere des Typs 2 verkauft.

2) Dies ist zwar wenig realistisch, doch kommt es im folgenden ohnedies nur darauf an, die Problemstellung zu skizzieren.

Notwendig für ein Maximum von (88) ist:

$$(89)\quad \frac{dE[E_2]}{dy_2} = \left(\frac{q_{22}}{q_{21}^{v}}-1\right)q_{21}^2 y_2 \phi(q_{21}y_2) - \left(\frac{q_{12}}{q_{11}}-1\right)q_{21}^2 y_2 \phi(q_{21}y_2)$$

$$+ y_2 q_{21}\left(\frac{q_{12}}{q_{11}} - \frac{q_{22}}{q_{21}^{v}}\right)q_{21}\phi(q_{21}y_2)$$

$$+ q_{21}\left(\frac{q_{12}}{q_{11}} - \frac{q_{22}}{q_{21}^{v}}\right)\int_{-\infty}^{q_{21}y_2}\phi(M_1)dM_1 + \left(q_{22} - q_{21}\frac{q_{12}}{q_{11}}\right) = 0 \,.$$

Nach geringen Umformungen führt (89) zur folgenden Bestimmungsgleichung von y_2:

$$(9o)\quad \int_{-\infty}^{q_{21}y_2}\phi(M_1)dM_1 = \frac{q_{21}^{v}}{q_{21}} \cdot \frac{q_{11}q_{22}-q_{12}q_{21}}{q_{11}q_{22}-q_{12}q_{21}^{v}} \,.$$

Bei bekannten Preisen $q_{ij}(i,j = 1,2)$ und q_{21}^{v} läßt sich y_2 mit Hilfe jeder Tabelle für Normalverteilungen angeben. Zusätzlich ist $q_{21}y_2 \leq M_1^{o}$ zu beachten. Wird etwa nach den Bedingungen gefragt, unter denen es optimal ist, M_1^{o} ausschließlich in Papieren des Typs 2 anzulegen, so folgt aus (9o), daß

$$(91)\quad \int_{-\infty}^{q_{21}y_2}\phi(M_1)dM_1 = \int_{-\infty}^{M_1^{o}}\phi(M_1)dM_1 = \frac{1}{2} = \frac{q_{21}^{v}}{q_{21}} \cdot \frac{q_{11}q_{22}-q_{12}q_{21}}{q_{11}q_{22}-q_{12}q_{21}^{v}}$$

gelten muß. Setzt man $q_{21}^{v} = \alpha q_{21}$, so entspricht dies

$$(92)\quad \alpha = \frac{q_{11}q_{22}}{2q_{11}q_{22}-q_{12}q_{21}} \,.$$

Sind die Zinssätze beispielsweise für beide Papiere gleich ($\frac{q_{22}}{q_{21}} = \frac{q_{12}}{q_{11}}$), so wird aus (92): $\alpha = 1$.

Die ausschließliche Anlage von M_1^o in Papieren des Typs 2 stellt also nur dann ein Optimum[1] dar, wenn sich auch das Papier 2 ohne jegliche Verluste verkaufen läßt ($q_{21}^v = q_{21}$). Ist hingegen die Verzinsung von Papier 2 größer als die von Papier 1, so kann der ausschließliche Erwerb von Papier 2 auch bei $\alpha<1$ vorteilhaft sein. Die genaue Bedingung ergibt sich aus (92).

Wenn anderseits $\alpha < \frac{q_{11}q_{22}}{2q_{11}q_{22}-q_{12}q_{21}}$, wird (9o) nur bei $q_{21}y_2<M_1^o$ erfüllt. Ein gemischtes Portefeuille anzulegen, ist demnach optimal.

Man könnte vermuten, daß sich diese Analyse auch dann anwenden läßt, wenn

a. allgemein n Papiere erworben werden können,

b. die Nutzenfunktion nichtlinear ist,

c. die Größen q_{12} und q_{11}^v (i=1,...,n) Zufallsvariable sind.

Die Annahmen a. und b. führen bei der Portefeuillebestimmung zu keinen grundsätzlich neuen Schwierigkeiten, wenn sich auch die rechnerische Ermittlung komplizierter gestaltet. Hingegen bewirkt die Annahme c., daß bei einer Änderung der Einlagen ($M_1 \neq M_1^o$) nicht mehr eindeutig gesagt werden kann, wie das Portefeuille umstrukturiert werden muß. Das auf S. 81 in Fußnote 1) erwähnte Vorgehen läßt sich bei schwankendem q_{12} und q_{11}^v nicht verwenden.

Die Schwierigkeit besteht nun darin: Ohne die Kenntnis der optimalen Umstrukturierung nach Änderung der Einlagen läßt sich die optimale Anlage von M_1^o nicht berechnen. Die Aufgabe der optimalen Umstrukturierung wiederum ist ein Problem, das der optimalen Anlage von M_1^o selbst gleicht.

---

1) Im vorliegenden Spezialfall ist jede Aufteilung von M_1^o "optimal".

Die Wahl der besten Strategie der ersten Stufe setzt mithin die Kenntnis der besten Strategie der zweiten Stufe voraus. Zu deren Ermittlung wird analog die Kenntnis der besten Strategie der dritten Stufe benötigt usw.

Dies ist die Problemstellung des dynamischen Programmierens[1], auf das hier nicht weiter eingegangen wird. Es sollte nur gezeigt werden, daß die optimale Portefeuillebestimmung recht schnell von der reinen μ,σ-Analyse wegführt.

Die mit dem dynamischen Programmieren verbundenen Schwierigkeiten lassen es wohl unter anderem erklären, warum in der Praxis nach wie vor sogenannte "Daumenregeln" eine wichtige Rolle spielen.

8. Die simultane Bestimmung von optimalem Konsum und optimalem Portefeuille

8.1. Der Zusammenhang mit dem Fisher'schen Ansatz zur Ermittlung des optimalen Konsums

Es sei x_h (bzw. x_m) die von einem Haushalt heute (bzw. morgen) nachgefragte Menge des Konsumgutes x (x ist ein Warenkorb). Der für x heute geltende und für morgen mit Sicherheit erwartete Preis ist 1.

Unter Benutzung dieser Schreibweise lautet der Fisher'sche Ansatz[2] zur Bestimmung des optimalen Konsums:
Maximiere $U = U(x_h, x_m)$ unter der Nebenbedingung $x_h + \frac{1}{1+r} x_m = M_1$, wobei M_1 den heute insgesamt zur Verfügung stehenden Betrag und $r = \frac{q_{12}}{q_{11}} - 1$ die bei sicherer Anlage zu erzielende Verzinsung angibt.

Die Tatsache, daß der heute gesparte Teil von M_1 (d.h. $M_1 - x_h$) auch zum Erwerb von Papieren verwandt

---

1) Vgl. R. Bellman [1o].

2) I. Fisher [28], S. 288 ff.

werden kann, deren Preis morgen nicht mit Sicherheit bekannt ist, findet in einem solchen Ansatz keine Berücksichtigung.

Es soll untersucht werden, welche Modifikationen an der Fisher'schen Überlegung vorzunehmen sind, wenn diese Möglichkeit zugelassen wird.

Wir setzen hierzu voraus, daß ein Papier des Typs 2 gekauft werden kann, dessen morgiger Preis q_{22} normalverteilt ist. Der Erwerb von x_m kann also nur dadurch erfolgen, daß der Haushalt heute ein Portefeuille aus den Papieren 1 und 2 zusammenstellt und es morgen zugunsten von x_m auflöst. Es gilt demnach:

$$(93) \quad x_m = q_{12}y_1 + q_{22}y_2 \ .$$

x_m entspricht, wie man sieht, dem Vermögen am Ende der Periode(M_2). Schließlich wird angenommen, daß sich die Nutzenfunktion $U = U(x_h, x_m)$ gemäß

$$(94) \quad U = U(x_h, x_m) = U_1(x_h) + U_2(x_m) \quad \text{mit}$$

$$\frac{dU_1}{dx_h} > 0 \ ; \ \frac{dU_2}{dx_m} > 0 \ ; \ \frac{d^2x_h}{dx_m^2} > 0$$

additiv zerlegen läßt[1)], und daß $U_2(x_m) = U_2(M_2)$ diejenige Nutzenfunktion ist, die zu einer über der Klasse der Normalverteilungen rationalen Präferenzfunktion gehört.

Beachten wir noch die Budgetrestriktion

$$(95) \quad x_h + q_{11}y_1 + q_{21}y_2 - M_1 = 0 \ ,$$

so läßt sich die Aufgabe, den erwarteten Nutzen über x_h und x_m zu maximieren, durch den folgenden

---

1) Das Problem der simultanen Bestimmung von optimalem Konsum und optimalem Portefeuille wurde neuerdings insbesondere von A. Sandmo diskutiert [89]. Auch dort wird angenommen, daß die Nutzenfunktion additiv zerlegt werden kann([89] , S.1o8). Im übrigen schlägt Sandmo allerdings einen anderen Weg ein.

Lagrangeansatz ausdrücken:

$$(96) \quad L = E[U(x_h, x_m)] + \lambda(x_h + q_{11}y_1 + q_{21}y_2 - M_1)$$

beziehungsweise wegen (93) und (94)

$$(97) \quad L = U_1(x_h) + E[U_2(q_{12}y_1 + q_{22}y_2)] + \lambda(x_h + q_{11}y_1 + q_{21}y_2 - M_1).$$

Dabei ist λ ein Lagrangefaktor. - Zu jeder gewählten y_1, y_2-Kombination gibt es in der Regel ein Sicherheitsäquivalent $x_m^{S'}$[1] gemäß

$$(98) \quad E[U_2(q_{12}y_1 + q_{22}y_2)] = U_2(x_m^{S'}(y_1, y_2)) .$$

Das zu x_h bei festem M_1 gehörende maximale Sicherheitsäquivalent - wir nehmen an, es sei eindeutig bestimmt - wird mit x_m^S bezeichnet. Bei bekannter Nutzenfunktion U_2 ist x_m^S eine Funktion g von $M_1 - x_h$ allein. Es gilt also:

$$(99) \quad x_m^S = g(M_1 - x_h) .$$

Notwendig für die Maximierung von (97) unter Beachtung von (99) ist, daß $x_m^{S'} = x_m^S$. Andernfalls könnte bei gleichem M_1 und x_h durch eine günstigere Aufteilung von $M_1 - x_h$ auf y_1 und y_2 wegen $\frac{dU_2}{dx_m} > 0$ der erwartete Nutzen erhöht werden.

Das Maximierungsproblem (97) kann daher auch wie in

$$(100) \quad L_1 = U_1(x_h) + U_2(x_m^S) + \lambda_1(x_m^S - g(M_1 - x_h))$$

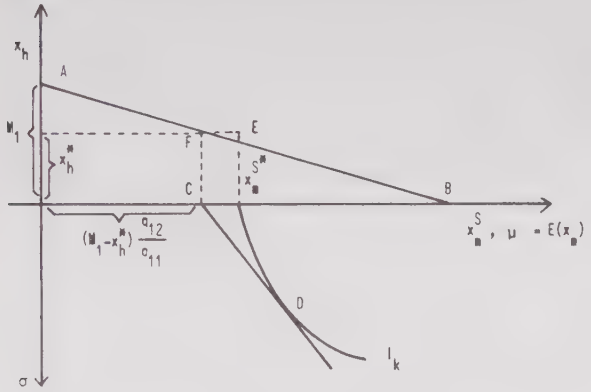
formuliert werden, wobei λ_1 einen Lagrangefaktor bezeichnet. Wichtig ist, daß in der als Nebenbedingung aufgefaßten Gleichung (99) bereits die Budgetrestriktion (95) zum Ausdruck kommt.

(99) wird im weiteren Verlauf Opportunitätskurve genannt. Sie entspricht in gewissem Sinne der

---

1) Vgl. zu diesem Begriff S. 38, Fußnote 1.

Fisher'schen Bilanzgeraden, jedoch ist auf Grund der Konstruktion klar, daß sie nicht allein durch Preise determiniert wird. Ihr Verlauf hängt ebenso von U_2 ab. Ohne die Kenntnis dieser Funktion kann das zu y_1 und y_2 gehörende Sicherheitsäquivalent $x_m^{S'}$ und damit x_m^S nicht angegeben werden. Genauere Aussagen über den Verlauf der Opportunitätskurve setzen also spezielle Angaben für U_2 voraus. Hierauf soll später eingegangen werden. Zuvor wollen wir die geschilderte Situation graphisch veranschaulichen.



Figur 12

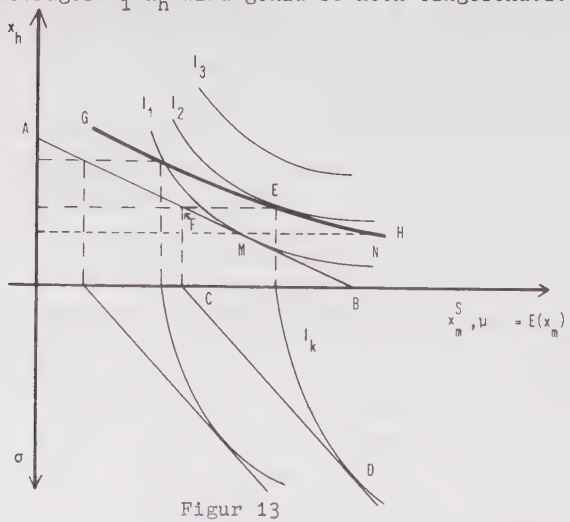
In Figur 12 entspricht der 1. Quadrant dem x_m^S, x_h-Koordinatensystem, der 4. Quadrant dem μ,σ-Diagramm. Die horizontale Achse bezeichnet daher gleichzeitig bestimmte x_m^S- und μ-Werte ($\mu = E[x_m] = E[M_2]$). Ein solches Vorgehen ist möglich, da sich jede spezielle Größe x_m^S als Erwartungswert einer Verteilung mit der Standardabweichung Null auffassen läßt.

Die im 1. Quadranten liegende Verbindungslinie AB kennzeichnet die Fisher'sche Bilanzgerade. Wird also heute x_h^* konsumiert, so steht bei sicherer Anlage des Betrages $M_1-x_h^*$ morgen

$$\frac{(M_1-x_h^*)q_{12}}{q_{11}}$$

zur Verfügung. Doch kann auch die Möglichkeit

genutzt werden, $M_1 - x_h^*$ ganz oder teilweise zum Erwerb des risikablen Wertpapiers 2 zu verwenden. Die durch solche Portefeuilles erreichbaren μ,σ-Kombinationen liegen, wie bereits erläutert[1], auf einer durch C verlaufenden Geraden. Sie ist in Figur 12 eingezeichnet. Die zu U_2 gehörende Präferenzfunktion $\Psi(\mu,\sigma)$ - annahmegemäß existiert sie und ist im Sinne des Bernoulli-Prinzips rational - liefert eine Indifferenzkurvenschar im μ,σ-Diagramm. Unterstellen wir, daß eine davon (nämlich I_k) die durch C verlaufende Gerade in Punkt D tangiert, so erbringt die D entsprechende μ,σ-Kombination den gleichen Nutzen, wie das im Schnittpunkt von I_k mit der μ-Achse abzulesende Sicherheitsäquivalent x_m^{S*}. In $E = (x_m^{S*}, x_h^*)$ ist ein Punkt der gesuchten Opportunitätskurve $x_m^S = g(M_1 - x_h)$ gefunden. Zwar kann E nicht unmittelbar realisiert werden, doch läßt sich x_h frei wählen, und die optimale Anlage des gesparten Betrages $M_1 - x_h^*$ wird genau so hoch eingeschätzt wie x_m^{S*}.



Figur 13

1) Vgl. S. 59 f. insbesondere S. 53, Figur 2. Die Punkte C in Figur 12 und A in Figur 2 entsprechen sich; während dort der ganze Betrag M_1 optimal anzulegen war, steht hier nur noch $M_1 - x_h$ zur Verfügung.

In gleicher Weise lassen sich andere Punkte der Opportunitätskurve konstruieren, so alle, die in Figur 13 auf der von G nach H eingezeichneten Verbindung liegen; es ist nicht gesagt, daß es sich dabei notwendigerweise um eine Gerade handelt.

Die Entscheidung zwischen heutigem und morgigem Verbrauch wird so gefällt, als seien die auf der Opportunitätskurve liegenden Punkte die jeweiligen Alternativen.

Tangiert eine Indifferenzkurve des x_h, x_m-Diagramms die Opportunitätskurve in E[1], so lautet die vom Haushalt zu treffende Entscheidung: x_h^* soll konsumiert und die gesparte Summe $M_1 - x_h^*$ in der dem Punkt D entsprechenden optimalen Weise angelegt werden. Die Höhe des heutigen Konsums x_h weicht natürlich im allgemeinen von derjenigen ab, die auf Grund des Tangentialpunktes M des Indifferenzkurvensystems mit der Fisher'schen Bilanzgeraden ($\overline{AB}$) zu wählen wäre. Ein derartiges Vorgehen würde die bei Risiko vorliegenden Alternativen nicht vollständig berücksichtigen. Ist die zu M gehörende Konsumentscheidung einmal gefallen, so läßt sich im günstigsten Fall (d.h. bei optimaler Portefeuilleauswahl) noch ein dem Punkt N auf der Opportunitätskurve entsprechender Nutzen erreichen. Im allgemeinen (so auch in Figur 13) wird dieser Nutzen geringer sein als der zu E gehörende.

Wir wollen die Opportunitätskurve $x_m^S = g(M_1 - x_h)$ für zwei einfache Präferenzfunktionen berechnen.

8.2. Der Fall der konstanten absoluten Risikoaversion

Zunächst sei

(101) $\Psi(\mu,\sigma) = \mu - \frac{a}{2}\sigma^2 \quad (a>0 \; ; \; a = \text{konstant})$

---

1) Da die Opportunitätskurve nicht notwendigerweise konkav zum Ursprung verläuft, kann es mehrere solcher Tangentialpunkte geben. Es wird hier unterstellt, daß E auch ein absolutes Maximum angibt.

vorausgesetzt[1]. Die Aufgabe, (1o1) unter der Nebenbedingung (95) zu maximieren, führt zum folgenden Lagrangeansatz mit λ_2 als Lagrangefaktor:

$$(1o2)\quad L_2 = q_{12}y_1+\bar{q}_{22}y_2-\frac{a}{2}\sigma_{22}y_2^2+\lambda_2(q_{11}y_1+q_{21}y_2-(M_1-x_h));$$

$$\bar{q}_{22} = E|q_{22}|\ ^{2)}$$

Notwendig für ein Maximum von (1o2) ist:

$$(1o3)\quad L_{2,y_1} = q_{12}+\lambda_2 q_{11} = 0$$

$$(1o4)\quad L_{2,y_2} = \bar{q}_{22}-a\sigma_{22}y_2+\lambda q_{21} = 0$$

$$(1o5)\quad L_{2,\lambda_2} = q_{11}y_1+q_{21}y_2-(M_1-x_h) = 0$$

Werden die aus (1o3) bis (1o5) resultierenden Lösungen

$$(1o6)\quad y_1^* = \frac{1}{q_{11}}\left[M_1-x_h-\frac{q_{21}}{a\sigma_{22}q_{11}}(q_{11}\bar{q}_{22}-q_{12}q_{21})\right] \quad \text{und}$$

$$(1o7)\quad y_2^* = \frac{1}{a\sigma_{22}q_{11}}(q_{11}\bar{q}_{22}-q_{12}q_{21})$$

in (1o1) eingesetzt, so ergibt sich:

$$(1o8)\quad \Psi^*(\mu,\sigma) = \frac{q_{12}}{q_{11}}(M_1-x_h)+\frac{1}{2a\sigma_{22}q_{11}^2}(q_{11}\bar{q}_{22}-q_{12}q_{21})^2 .$$

Die Forderung

$$(1o9)\quad \Psi(\mu,\sigma) = \mu-\frac{a}{2}\sigma^2 = \Psi^*(\mu,\sigma)$$

liefert für $\sigma = 0$ das zu x_h bei festem M_1 gehörende maximale Sicherheitsäquivalent

$$(11o)\quad \mu\Big|_{\sigma=0} = x_m^S = \frac{q_{12}}{q_{11}}(M_1-x_h)+\frac{1}{2a\sigma_{22}q_{11}^2}(q_{11}\bar{q}_{22}-q_{12}q_{21})^2$$

bzw. als Funktion von x_h aufgefaßt die Opportunitätskurve $x_m^S = g(M_1-x_h)$.

---

1) Vgl. H. Schneeweiß [98], S. 146. Wie J.W. Pratt ([76], S. 13o) gezeigt hat, handelt es sich hierbei um den Spezialfall der konstanten absoluten Risikoaversion (vgl. oben S. 38 f.).

2) Da das Papier 1 eine sichere Anlage darstellt, gilt $E[q_{12}] = \bar{q}_{12} = q_{12}$.

Die Opportunitätskurve wird also im vorliegenden Fall durch eine Gerade dargestellt, die bei $q_{11}\bar{q}_{22}-q_{12}q_{21} \neq 0$ rechts von der Fisher'schen Bilanzgeraden liegt und die gleiche Steigung aufweist. Führen wir die zusätzlichen Restriktionen $y_1, y_2 \geq 0$ ein, so werden die Gleichungen (1o3) und (1o4) durch

$$(111)\quad q_{12}+\lambda_2 q_{11} \qquad \begin{cases} \leq 0, \text{ wenn } y_1 = 0 \\ = 0, \text{ wenn } y_1 > 0 \end{cases} \qquad \text{bzw.}$$

$$(112)\quad \bar{q}_{22}-a\sigma_{22}y_2+\lambda q_{21} \qquad \begin{cases} \leq 0, \text{ wenn } y_2 = 0 \\ = 0, \text{ wenn } y_2 > 0 \end{cases}$$

ersetzt[1]. Falls y_1 und y_2 größer als Null sind, ändert sich an der bisherigen Lösung nichts. Nehmen wir daher $y_1^* = 0$ an, so folgt wegen (1o5) aus (112):

$$(113)\quad y_2^* = \frac{(M_1-x_h)}{q_{21}} \quad .$$

Die Präferenzfunktion $\Psi(\mu,\sigma)$ nimmt bei $y_1^* = 0$ und y_2^* gemäß (113) den Wert

$$(114)\quad \Psi^*(\mu,\sigma) = \frac{\bar{q}_{22}}{q_{21}}(M_1-x_h) - \frac{a\sigma_{22}}{2q_{21}^2}(M_1-x_h)^2$$

an. Das zugehörige Sicherheitsäquivalent ergibt sich aus

$$(115)\quad \Psi(\mu,\sigma) = \mu - \frac{a}{2}\sigma^2 = \Psi^*(\mu,\sigma) \qquad \text{gemäß}$$

$$(116)\quad \mu\Big|_{\sigma=0} = x_m^S = \frac{\bar{q}_{22}}{q_{21}}(M_1-x_h) - \frac{a\sigma_{22}}{2q_{21}^2}(M_1-x_h)^2.$$

Wir sehen, daß bei $x_h=0$ auch $x_m^S=0$; $\frac{dx_m^S}{dx_h} = -\frac{\bar{q}_{22}}{q_{21}} + \frac{a\sigma_{22}}{q_{21}^2}(M_1-x_h)$ und

---

1) Vgl. zu diesen Kuhn-Tucker Bedingungen die auf S. 44 in Fußnote 2 angegebenen Quellen.

$\frac{d^2x_m^S}{dx_h^2} = -\frac{a\sigma_{22}}{q_{21}^2} < 0$ gilt.

Nun erkennt man wegen (111), (112) und (1o5), daß $y_1=0$ nur für

$$(117)\quad (M_1-x_h) \leqq \frac{q_{21}(q_{11}\bar{q}_{22}-q_{12}q_{21})}{a\sigma_{22}q_{11}}$$

erfüllt sein kann. Bei positiven Größen q_{12}, q_{21}, a und σ_{22} hat dies zur Folge, daß

$(M_1-x_h) < \frac{q_{11}q_{21}\bar{q}_{22}}{a\sigma_{22}q_{11}}$ und damit der Ausdruck $\frac{dx_m^S}{dx_h}$ negativ sein muß. Soweit bei gegebenem M_1 und hinreichend großem x_h die Forderung (117) nicht erfüllt ist, kann y_1 nicht gleich Null sein. In diesem Fall erhalten wir für die Opportunitätskurve die alte Lösung (11o).

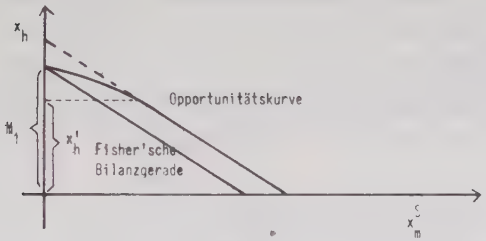
Setzen wir hingegen $y_2 = 0$ voraus, so ist y_1 durch (1o5) determiniert. Die Opportunitätskurve fällt mit der Fisher'schen Bilanzgeraden zusammen. Wir beachten, daß $y_2 = 0$ wegen (111), (112) und (1o5) nur für

$$(118)\quad q_{11}\bar{q}_{22} - q_{12}q_{21} \leqq 0$$

erfüllt sein kann. Das Papier 2 wird also nur dann nicht nachgefragt, wenn seine erwartete Verzinsung kleiner oder gleich der von Papier 1 ist. Für einen "risk-averter" (siehe (1o1)) ist dies insoweit typisch, als er bei $q_{11}\bar{q}_{22} \leqq q_{12}q_{21}$ auf jeden Fall nur das Papier 1 erwirbt.

Insgesamt erhalten wir unter der Voraussetzung, daß $y_1, y_2 \geqq 0$, $q_{11}\bar{q}_{22} > q_{12}q_{21}$ und daß die Ungleichung (117) nur für ein Intervall $[x_h', M_1]$ mit $0<x_h'<M_1$

erfüllt ist[1], den folgenden Verlauf der Opportunitätskurve:



Figur 14

Steigt ceteris paribus q_{12}, d.h. die sichere Verzinsung, so bedeutet dies für die Fisher'sche Bilanzgerade eine Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn um den Punkt $(0,M_1)$. Die Opportunitätskurve verläuft zwar nach wie vor parallel zu ihr, doch verringert sich der Abstand (siehe (11o)). Hingegen vergrößert sich das Intervall $[0,x'_h]$ und damit der gerade Teilabschnitt der Opportunitätskurve. Sie nähert sich ceteris paribus also mit wachsendem q_{12} immer stärker der Fisher'schen Bilanzgeraden, mit der sie - wie erwähnt - bei $q_{11}\bar{q}_{22}-q_{12}q_{21} = 0$ zusammenfällt.

8.3. Der Fall der konstanten relativen Risikoaversion

Im folgenden wird die gleiche Analyse für eine weitere recht interessante Präferenzfunktion durchgeführt. Wir gehen hierzu von einem Indifferenzkurvenverlauf im μ,σ-Diagramm aus, den Hicks[2] beschreibt, wenn er ihn auch nicht explizit angibt:

> "There is no apparent reason why the successive indifference curves should not be related to one another as the successive frontier curves are related - in the way that the successive contour lines of a constant returns to scale production function are related - one being derived from another by magnification along vectors through the origin."

1) Es kann natürlich nicht ausgeschlossen werden, daß (117) für alle x_h oder kein x_h mit $0<x_h<M_1$ gilt.
2) J. R. Hicks [41], S. 114.

Es läßt sich zeigen, daß unter diesen Voraussetzungen die Steigung der einzelnen Indifferenzkurven nur vom Verhältnis $\frac{\sigma}{\mu}$ abhängt[1]. Eine einfache Form, diese Aussage zu berücksichtigen, ist z.B.

$$(119) \qquad \frac{d\sigma}{d\mu} = \frac{1}{a}\,\frac{\mu}{\sigma}$$

mit einer beliebigen Konstanten $a>0$. Hieraus läßt sich die Präferenzfunktion

$$(120) \qquad \Psi(\mu,\sigma) = \mu^2 - a\sigma^2$$

durch Integration gewinnen. Obwohl (120) - wie man beweisen kann[2] - über der Klasse der Normalverteilungen nicht rational im Sinne des Bernoulli-Prinzips

---

1) Angenommen die Punkte $A=(\mu_1, f(\mu_1))$ und $B=(\mu_2, f(\mu_2))$ liegen auf einer Indifferenzkurve $\sigma = f(\mu)$. Dann liegen wegen der von Hicks angegebenen Konstruktion mit $\alpha>0$ auch die Punkte
$C = (\mu_3, g(\mu_3)) = \alpha(\mu_1, f(\mu_1)) = A$ und
$D = (\mu_4, g(\mu_4)) = \alpha(\mu_2, f(\mu_2)) = B$
auf einer Indifferenzkurve $\sigma = g(\mu)$. Folglich gilt

$$f'(\mu)\Big|_{\mu=\mu_1} = \lim_{\mu_2\to\mu_1} \frac{f(\mu_1)-f(\mu_2)}{\mu_1-\mu_2} = \lim_{\alpha\mu_2\to\alpha\mu_1} \frac{\alpha f(\mu_1)-\alpha f(\mu_2)}{\alpha\mu_1-\alpha\mu_2} =$$

$$\lim_{\mu_4\to\mu_3} \frac{g(\mu_3)-g(\mu_4)}{\mu_3-\mu_4} = g'(\mu)\Big|_{\mu=\mu_3}$$

Die Steigung der Indifferenzkurven $\sigma=f(\mu)$ bzw. $\sigma=g(\mu)$ in den Punkten A bzw. C ist also die gleiche. Da α sämtliche Werte annehmen kann, die größer als Null sind, gilt eine solche Aussage für alle Punkte, die wie C auf der durch den Ursprung und A gehenden Geraden liegen. Da anderseits auch A beliebig ist, folgt die oben aufgestellte Behauptung.

2) Wir benutzen hierzu das Theorem 4* von H. Schneeweiß ([98], S. 143). Danach müßte

$$Q = \frac{\Psi_{\mu\mu} - \frac{1}{\sigma}\Psi_{\sigma}}{\Psi_{\mu}^2}$$

auf jeder Indifferenzlinie im μ,σ-Diagramm konstant sein, wenn (120) im Sinne des Bernoulli-Prinzips rational sein soll. Im vorliegenden Fall ist $Q = \frac{1+a}{2\mu^2}$. Da μ auf jeder Indifferenzlinie beliebige Werte annehmen kann - und somit auch Q - wird die genannte Bedingung nicht erfüllt.

ist, wollen wir diese Präferenzfunktion zunächst benutzen und insbesondere die aus ihr herzuleitende Opportunitätskurve untersuchen.

Wir bemerken, daß die einzelnen Indifferenzkurven bei $\Psi(\mu,\sigma)>0$ konkav zur -Achse verlaufen, senkrecht aus ihr entspringen und sich asymptotisch einer durch den Ursprung gehenden Geraden mit der Steigung $\frac{d\sigma}{d\mu} = \frac{1}{\sqrt{a}}$ nähern[1].

Wird - analog zum obigen Vorgehen - (12o) unter der Nebenbedingung (95) maximiert, so führt dies zu nachstehendem Lagrangeansatz mit λ_3 als Lagrangefaktor:

$$(121)\quad L_3 = (q_{12}y_1+\bar{q}_{22}y_2)^2 - a\sigma_{22}y_2^2 + \lambda_3(q_{11}y_1+q_{21}y_2-(M_1-x_h)) \quad .$$

Die notwendigen Bedingungen für ein Maximum von (121) lauten

$$(122)\quad L_{3,y_1} = 2(q_{12}y_1+\bar{q}_{22}y_2)q_{12} + \lambda_3 q_{11} = 0$$

$$(123)\quad L_{3,y_2} = 2(q_{12}y_1+\bar{q}_{22}y_2)\bar{q}_{22} - 2a\sigma_{22}y_2 + \lambda_3 q_{21} = 0$$

$$(124)\quad L_{3,\lambda_3} = q_{11}y_1+q_{21}y_2-(M_1-x_h) = 0$$

Aus (122) bis (124) ergeben sich die Lösungen:

$$(125)\quad y_1^* = \frac{-\bar{q}_{22}A+a\sigma_{22}q_{11}}{-A^2+a\sigma_{22}q_{11}^2}(M_1-x_h) \qquad \text{und}$$

$$(126)\quad y_2^* = \frac{q_{12}A}{-A^2+a\sigma_{22}q_{11}^2}(M_1-x_h) \quad , \qquad \text{wobei}$$

$$(127)\quad A = q_{11}\bar{q}_{22}-q_{12}q_{21}$$

gilt.

---

1) Es handelt sich um eine Asymptote der durch (12o) gegebenen Hyperbel.

Man erkennt hieraus leicht den folgenden Zusammenhang:

Wenn $A = 0$, wird $y_1^* = \frac{(M_1 - x_h)}{q_{11}}$ und $y_2^* = 0$

Wenn $q_{11}\sqrt{a\sigma_{22}} > A > 0$, wird $y_1^* < \frac{(M_1 - x_h)}{q_{11}}$ und $y_2^* > 0$.

Die zweite Aussage kann aus der ersten zusammen mit

$$(128) \quad \frac{dy_2^*}{dA} = \frac{q_{12}A^2 + a\sigma_{22}q_{11}^2 q_{12}}{|-A^2 + a\sigma_{22}q_{11}^2|^2}(M_1 - x_h) > 0$$

gefolgert werden. Insoweit stimmen die Ergebnisse mit den für die Präferenzfunktion (1o1) gefundenen überein. Berechnen wir (12o) für die Lösungen (126) und (127), so ergibt sich

$$(129) \quad \psi^*(\mu, \sigma) = \frac{a\sigma_{22}q_{12}^2}{-A^2 + a\sigma_{22}q_{11}^2}(M_1 - x_h)^2$$

Die Präferenzfunktion $\mu^2 - a\sigma^2 = \psi^*(\mu, \sigma)$ schneidet die μ-Achse in

$$(13o) \quad \mu\Big|_{\sigma=0} = x_m^S = (M_1 - x_h) \cdot \frac{q_{12}}{\sqrt{q_{11}^2 - \frac{A^2}{a\sigma_{22}}}} = \beta(M_1 - x_h);$$

$$\beta = \frac{q_{12}}{\sqrt{q_{11}^2 - \frac{A^2}{q\sigma_{22}}}} \quad .$$

(13o) ist die gesuchte Opportunitätskurve. Wird ihre Umformung

$$(131) \quad x_h = M_1 - \frac{x_m^S}{\beta}$$

der Fisher'schen Bilanzgeraden

$$(132) \quad x_h = M_1 - \frac{x_m}{\frac{q_{12}}{q_{11}}} \qquad \text{(bei Fisher ist } x_m = x_m^S\text{)}$$

gegenüberstellt, so erkennt man: Die Opportunitätskurve ist für die Präferenzfunktion (12o) eine Gerade; sie hat mit der Fisher'schen Bilanzgeraden den Punkt auf der x_h-Achse gemeinsam und liegt bei $A>0$ im übrigen rechts von ihr. Wenn $A = 0$, fällt sie mit ihr zusammen; ebenso bei $A<0$, wenn $y_2<0$ ausgeschlossen wird[1].

Wir wollen einige Eigenschaften von β festhalten. Man sieht sofort, daß

$$(133) \quad \frac{\partial \beta}{\partial \sigma_{22}} < 0 \; ; \; \frac{\partial \beta}{\partial q_{21}} < 0 \; ; \; \frac{\partial \beta}{\partial a} < 0 \; .$$

Steigende Streuung oder ein steigender Preis für das Papier 2 bewirken also eine Verringerung von β und damit ceteris paribus eine Annäherung der Opportunitätskurve an die Fisher'sche Bilanzgerade. Gleiches gilt bei einer Erhöhung von a, was als steigende Risikoaversion verstanden werden kann[2]. Völlig entsprechend führt ein wachsendes $\bar{q}_{22}$ dazu, daß sich der Winkel zwischen beiden Geraden vergrößert, also

$$(134) \quad \frac{\partial \beta}{\partial \bar{q}_{22}} > 0 \; .$$

Es gilt sogar

$$(135) \quad \lim_{\substack{\bar{q}_{22} \to \bar{q}'_{22} \\ \bar{q}_{22} > \bar{q}'_{22}}} \beta = 0 \quad , \text{ wenn } \bar{q}'_{22} = \frac{q_{12}q_{21} + q_{11}\sqrt{a\sigma_{22}}}{q_{11}}$$

Es ist jedoch zu beachten, daß y_1 wegen (125) für alle Werte $\bar{q}_{22}$ mit

---

1) Vom Fall $-A^2 + a\sigma_{22}q_{11}^2 < 0$ sei hier einmal abgesehen.

2) Allerdings nicht im strengen Sinn der Fußnote 1) auf Seite 38, da hierzu - was nicht möglich ist - die Nutzenfunktion zu (12o) gefunden werden müßte.

(136) $\bar{q}_{22} > \frac{1}{2q_{11}}\left[q_{12}q_{21} + \sqrt{q_{12}^2q_{21}^2+4a\sigma_{22}q_{11}^2}\right] = \bar{q}''_{22}; \bar{q}''_{22} < \bar{q}'_{22}$

negativ wird. Will man dies ausschließen, so besteht unter der Voraussetzung (136) das gesamte optimale Portefeuille nur aus Papieren des Typs 2. die Opportunitätskurve hat dann die Form[1].

(137) $x_m^S = \frac{\sqrt{\bar{q}_{22}^2-a\sigma_{22}}}{q_{21}}(M_1-x_h)$ bzw. $x_m^S = \beta'(M_1-x_h)$

mit $\beta' = \frac{\sqrt{\bar{q}_{22}^2-a\sigma_{22}}}{q_{21}}$.

Die Steigung $\frac{dx_h}{dx_m^S}$ strebt in diesem Fall, was wesentlich realistischer ist, nicht bereits bei einem endlichen Wert von $\bar{q}_{22}$ dem Wert Null zu.
Schließlich liefert die Abhängigkeit von q_{12} für β

(138) $\frac{\partial\beta}{\partial q_{12}} = \frac{q_{11}(a\sigma_{22}q_{11}+q_{12}q_{21}\bar{q}_{22}-q_{11}\bar{q}_{22}^2)}{\sigma_{22}(q_{11}^2-\frac{A^2}{a\sigma_{22}})}$.

Beschränken wir uns auf den relevanten Bereich $0<A^2<a\sigma_{22}q_{11}^2$, so zeigt ein Vergleich von (138)mit (125), daß

(139) $\frac{\partial\beta}{dq_{12}} \begin{cases} > 0, \text{ wenn } y_1 > 0 \\ < 0, \text{ wenn } y_1 < 0 \end{cases}$.

Sieht das optimale Portefeuille also eine Verschuldung im Papier 1 vor, so dreht sich die Opportunitätskurve bei steigendem Zinssatz für dieses Papier nach links um den festen Punkt auf der x_h-Achse. Die Alternativen verschlechtern sich. Allerdings erkennt man

---

[1] Wegen(124) gilt: $y_2^* = (M_1-x_h)/q_{21}$ und folglich $\psi^*(\mu,\sigma) = \left[\frac{q_{22}}{q_{21}}(M_1-x_h)\right]^2-a\sigma_{22}\left[\frac{M_1-x_h}{q_{21}}\right]^2$. Aus der Forderung $\mu^2-a\sigma^2 = \psi^*(\mu,\sigma)$ resultiert für $\sigma=0$ die Gleichung (137).

aus (138), daß dies bei fortwährender Erhöhung von q_{12} nur bis zur Grenze

$$(14o) \qquad q_{12} = \frac{q_{11}\bar{q}_{22}^2 - a\sigma_{22}q_{11}}{q_{21}\bar{q}_{22}}$$

der Fall sein kann. Steigt q_{12} über den durch (14o) gegebenen Wert, so dreht sich die Opportunitätskurve (genau so wie die Fisher'sche Bilanzgerade) entgegen dem Uhrzeigersinn.
Schreiben wir (138) in der Form

$$(141) \qquad \frac{\partial\beta}{\partial q_{12}} = \frac{1}{q_{11} + \dfrac{q_{12}q_{21}(q_{11}\bar{q}_{22} - q_{12}q_{21})}{q_{11}(a\sigma_{22}q_{11} + q_{12}q_{21}\bar{q}_{22} - q_{11}\bar{q}_{22}^2)}}$$

und beachten, daß $\frac{\partial(\frac{q_{12}}{q_{11}})}{\partial q_{12}} = \frac{1}{q_{11}}$, so folgt für

$A = q_{11}\bar{q}_{22} - q_{12}q_{21} > 0$ und $a\sigma_{22}q_{11} + q_{12}q_{21}\bar{q}_{22} - q_{11}\bar{q}_{22}^2 > 0$

d.h. $y_1 > 0$ die Beziehung

$$(142) \qquad \frac{\partial\beta}{\partial q_{12}} < \frac{\partial(\frac{q_{12}}{q_{11}})}{\partial q_{12}} \quad .$$

Bei Benutzung von (131) und (132) läßt sich (142) wie folgt interpretieren:
Die Rechtsdrehung der Opportunitätskurve um den festen Punkt auf der x_h-Achse ist bei einer Erhöhung der sicheren Verzinsung und bei $y_1 > 0$ geringer als die Rechtsdrehung der Fisher'schen Bilanzgeraden. Dies gilt solange $A > 0$. Wenn $A = 0$ fallen beide Kurven, wie erwähnt, zusammen.

Wir dürfen jedoch nicht vergessen, daß der unter der Voraussetzung (12o) durchgeführten Analyse ein prinzipieller Nachteil anhaftet. Die Präferenzfunktion $\Psi(\mu,\sigma) = \mu^2 - a\sigma^2$ ist nicht rational im Sinne des

Bernoulli-Prinzips. Eine zugehörige Nutzenfunktion $U_2(x_m)$ läßt sich folglich nicht angeben und damit auch keine Funktion $U = U_1(x_h)+U_2(x_m)$. Allerdings kann der grundsätzliche Verlauf der Opportunitätskurve, wie er in (13o) ermittelt wurde, auch in anderer Weise begründet werden.

Hierzu nehmen wir an, daß der Haushalt am Ende der Periode ein Vermögen von $M_2=M_1-x_h$ besitzt, wenn er den von M_1 nicht konsumierten Teil in keiner Weise anlegt.

Dem Haushalt werde daneben die Möglichkeit geboten, für jede in ein Portefeuille investierte DM bestimmte Auszahlungen am Ende der Periode zu erhalten. Deren Wahrscheinlichkeitsverteilung sei w'[1]. w' hängt von den Anteilen einzelner Papiere im Portefeuille ab.

Im Anschluß an Pratt[2] wird die folgende Situation betrachtet: der Haushalt sei gegenüber den beiden Möglichkeiten indifferent, entweder $(M_1-x_h)w'$ oder das Sicherheitsäquivalent

$$x_m^{S'} = E[(M_1-x_h)w'] - (M_1-x_h)Pr^*(M_1-x_h,w')$$

im Zeitpunkt 2 zu erhalten. $Pr^*(M_1-x_h,w')$ bezeichnet die an der Stelle $M_2=M_1-x_h$ gemessene relative Risikoprämie[3] $Pr^*(M_2,w')$. Wir gehen speziell davon aus, daß $Pr^*(M_2,w')$ unabhängig von M_2 ist. Pratt hat gezeigt[4], daß eine konstante relative Risikoprämie dann gegeben ist, wenn

$$R_R(M_2) = \frac{U''(M_2)M_2}{U'(M_2)} \quad \text{konstant ist.}$$

---

1) w' kann natürlich auch aus dem einzigen Wert $\frac{(M_1-x_h)q_{12}}{q_{11}}$ bestehen.

2) J. W. Pratt [76] , S. 134.

3) Zu diesem Begriff ebenda, S. 133 f.. Vgl. auch S. 38, Fußnote 1.

4) Die Aussage folgt unmittelbar aus seinem Theorem 6. (J. W. Pratt [76] , S. 135.

Für das Sicherheitsäquivalent läßt sich unter dieser Voraussetzung schreiben:

(143) $x_m^{S'} = (M_1 - x_h)\,(E[w'] - Pr^*(w'))$.

Das zu jedem $(M_1 - x_h)$ maximale Sicherheitsäquivalent x_m^S wird dadurch ermittelt, daß unter allen w' diejenige Wahrscheinlichkeitsverteilung w ausgewählt wird, die $E[w'] - Pr^*(w')$ maximiert. Es gilt also

(144) $x_m^S = (M_1 - x_h)(E[w] - Pr^*(w))$.

Da $E[w] - Pr^*(w)$ eine Konstante ist, entspricht (144) grundsätzlich der Form (13o), wobei sich im allgemeinen die Größen $E[w] - Pr^*(w)$ und β unterscheiden.

Im Rahmen des μ,σ-Prinzips $\Psi(\mu,\sigma) = \mu^2 - a\sigma^2$ hatten wir für die Opportunitätskurve gefunden, daß sie im allgemeinen rechts von der Fisher'schen Bilanzgeraden liegt, linear ist und den gleichen Punkt auf der x_h-Achse besitzt.

Es überrascht, daß dieses Ergebnis hier auf ganz andere Weise bestätigt werden konnte. Dabei ist das zuletzt aufgezeigte Vorgehen wesentlich vorteilhafter, was deutlich wird, wenn wir die Unterschiede zusammenfassen:

a. Im ersten Fall waren von Hicks bestimmte Eigenschaften für den Verlauf der Indifferenzkurven im μ,σ-Diagramm gefordert worden. Im zweiten Fall wurde postuliert, daß $-\frac{U''(M_2)M_2}{U'(M_2)}$ konstant ist.

b. Die Hicks'sche Überlegung schränkte die zugelassenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen zumindest auf die-

jenigen Verteilungen ein, für die μ und σ existieren[1]. Bei Arrow und Pratt gilt dies hingegen nicht.

c. Hicks impliziert durch die für die Indifferenzkurven verlangte Eigenschaft[2] eine bestimmte Präferenzfunktion. Die nächstliegende wurde hier untersucht; sie ist bereits nicht rational im Sinne des Bernoulli-Prinzips. Es läßt sich also keine zugehörige Nutzenfunktion über M_2 finden. Pratt hingegen führt alle drei Möglichkeiten an, die sich aus der Forderung

$$-\frac{U''(M_2)M_2}{U'(M_2)} = a = \text{konstant}$$

für die Nutzenfunktion $U(M_2)$ ergeben. Es gilt[3]:

(145) $U_2(M_2) = M_2^{1-a}$, wenn $a < 1$

(146) $U_2(M_2) = \log M_2$, wenn $a = 1$

(147) $U_2(M_2) = -M_2^{-(a-1)}$, wenn $a > 1$

---

1) Hicks geht nicht von der zu einer quadratischen Nutzenfunktion gehörenden Präferenzfunktion über μ und σ aus. Nun ist die quadratische Nutzenfunktion - wie auf S. 46, Fußnote 2 bereits erwähnt - die einzige Nutzenfunktion, für die bei allen Wahrscheinlichkeitsverteilungen, für die μ und σ existieren, das Bernoulli-Prinzip mit einem (eindeutig bestimmten) μ,σ-Prinzip vereinbar ist. Beide Aussagen zusammen bedeuten, daß die bei der Hicks'schen Präferenzfunktion zugelassenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen noch weiter eingeschränkt werden müßten, wenn nicht ohnedies der Einwand c. (siehe oben) vorgebracht werden könnte.

2) Vgl. das Zitat auf S. 93.

3) J.W. Pratt [76], S. 134.

9. Konkurrenzgleichgewicht und Entscheidung bei Risiko

9.1. Die Analyse von Arrow

9.1.1. Darstellung

In der Nutzenfunktion (94) war vorausgesetzt worden, daß es eine globale Präferenz für einen Warenkorb bzw. das Vermögen im Zeitpunkt 2 gibt. Arrow[1] und Hirshleifer[2], zum Teil auch Radner[3] diskutieren das Entscheidungsproblem bei Risiko in ganz anderer Weise, so daß es notwendig wird, hierauf kurz einzugehen.

Von Arrow[4] werden mehrere Zustände s der Welt (s=1,...,S), die Induviduen i (i=1,...,I) und die Güter c (c=1,...,C) unterschieden. Einzelne Individuen i legen ihrer Entscheidung subjektive Wahrscheinlichkeiten π_{is} über die möglichen Zustände s der Welt zugrunde. Es werden für sie Nutzenfunktionen V_i postuliert, deren Argumente x_{isc} diejenigen Mengen des Gutes c bezeichnen, die das Indivuduum i im Zustand s zu konsumieren beabsichtigt. Es gilt also

$$(148)\quad V_i = V_i(x_{i11},\ldots,x_{i1C},x_{i21},\ldots,x_{i2C},x_{i2C},\ldots,x_{iSC}) = V_i(\mathfrak{x}_i) \text{ mit } \mathfrak{x}_i = [x_{i11},\ldots,x_{iSC}] \quad .$$

Hierbei liegt eigentlich nichts weiter vor als eine Spezialisierung des Gutsbegriffes. Güter werden nicht nur nach sachlichen, persönlichen und zeitlichen Merkmalen unterschieden[5], sondern auch nach den verschiedenen möglichen Zuständen der Welt. Wenn

---

1) K.J. Arrow [6].
2) J. Hirshleifer [44] und [43].
3) R. Radner [77].
4) K.J. Arrow [6], S. 91.
5) Vgl. R. Richter [79], S. 9f.

vorausgesetzt werden kann, daß die Indifferenzkurven (für V_i = konstant) konvex zum Ursprung sind, so lassen sich - wie Arrow zeigt[1] - die bekannten Sätze der Wohlfahrtstheorie fast wörtlich übernehmen.

Wir benutzen dazu folgende Definitionen:

$\bar{\varphi}_i$ gibt den Vektor der Anfangsausstattung von i an

$\vartheta = [q_{11},\ldots,q_{1C},q_{21},\ldots,q_{2C},\ldots,q_{SC}]$ bezeichnet den Vektor der heutigen Preise für die einzelnen Güter c im Zustand s

$$y_i = \vartheta' \bar{\varphi}_i$$

$$\sum_{i=1}^{I} \bar{\varphi}_i = \bar{\varphi}$$

Der Vektor $V = [V_1(\varphi_1),\ldots,V_I(\varphi_I)]$ heißt realisierbar, wenn die Größen φ_i folgender Ungleichung genügen:

$$\sum_{i=1}^{I} \varphi_i \leqq \bar{\varphi}$$

Als Paretooptimum wird ein Vektor V^o bezeichnet, wenn er realisierbar ist und für alle anderen realisierbaren Vektoren V gilt: $V \leqq V^o$.
Maximieren die Induviduen $V_i = V_i(\varphi_i)$ unter der Nebenbedingung $\vartheta'\varphi_i \leqq y_i$ $(i=1,\ldots,I)$, so lassen sich Nachfragefunktionen $\varphi_i = \varphi_i(\vartheta)$ und ein zugehöriges totales Konkurrenzgleichgewicht gemäß

$$\sum_{i=1}^{I} \varphi_i(\vartheta) = \bar{\varphi}$$

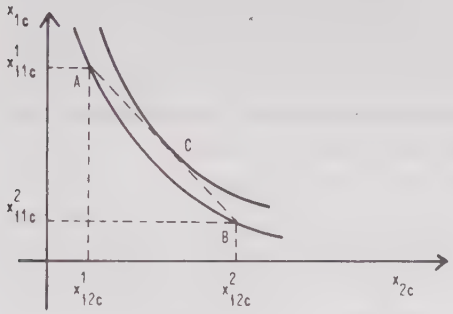
angeben, und es gilt der Satz[2]:
Jedes Paretooptimum V^o läßt sich durch geeignete Wahl von $\vartheta = [y_1,\ldots,y_I]$ und ϑ erreichen.
Dies ist bekannt.

---

1) K.J. Arrow [6] , S. 91 f.
2) ebenda, S. 92.

Einer gesonderten Erläuterung bedarf im vorliegenden Fall nur die Frage, wodurch gewährleistet ist, daß die Nutzenfunktion V_i (i=1,...,I) tatsächlich quasikonkav[1], d.h. die Indifferenzkurven konvex zum Ursprung sind.

Betrachten wir den Fall, in dem das Individuum i nur zwei Güter nachfragt und zwar das Gut c in den Zuständen 1 und 2.



Figur 15

Zwei bestimmte Mengenkombinationen hiervon, die Punkte $A = (x^1_{i1c}, x^1_{i2c})$ und $B = (x^2_{i1c}, x^2_{i2c})$, sollen auf einer Indifferenzkurve liegen, d.h. $V_i(x^1_{i1c}, x^1_{i2c}) = V_i(x^2_{i1c}, x^2_{i2c})$. Um die Konvexität der Indifferenzkurven zu gewährleisten, muß gefordert werden, daß für je zwei Punkte mit der obigen Eigenschaft

$$V_i\left[\alpha x^1_{i1c}+(1-\alpha)x^2_{i1c};\alpha x^1_{i2c}+(1-\alpha)x^2_{i2c}\right] \geq \alpha V_i\left[x^1_{i1c}, x^1_{i2c}\right]$$

$$+(1-\alpha)V_i\left[x^2_{i1c}, x^2_{i2c}\right] = V_i\left[x^1_{i1c}, x^1_{i2c}\right] = V_i\left[x^2_{i1c}, x^2_{i2c}\right];$$

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

---

1) Als quasikonkav bezeichnet Arrow ([6], S. 92) eine Funktion V_i dann, wenn für je zwei Punkte $\mathcal{Y}_1$ und $\mathcal{Y}_2$ mit $V_i(\mathcal{Y}_1) \geq V_i(\mathcal{Y}_2)$ und jede reelle Zahl α mit $0 \leq \alpha \leq 1$ gilt: $V_i|\alpha\mathcal{Y}_1+(1-\alpha)\mathcal{Y}_2| \geq V_i(\mathcal{Y}_2)$.

erfüllt ist. Wenn α (bzw. $1-\alpha$) gleich π_{11} und $(1-\alpha)$ gleich π_{12} gewählt wird, so besagt dies, daß der Nutzen des Erwartungswertes von A und B, d.h. der von C, größer ist als der Erwartungswert des Nutzens - was gerade den "risk-averter" charakterisiert.

Dieses Ergebnis kann leicht auf n Güter und S Zustände verallgemeinert werden. Die Quasikonkavität von V_i und die Charakterisierung von i als "risk-averter" entsprechen sich also[1].

9.1.2. Kritik

Eine solche Analyse mag zwar formal befriedigen, sie besitzt indes einige Nachteile.

Dadurch, daß die Güter nach den jeweiligen Zuständen der Welt unterschieden werden, ist der Zahl der denkbaren Märkte so gut wie keine Grenze mehr gesetzt. Alle Bedenken, die eine positive Betrachtungsweise gegen das Modell des totalen Konkurrenzgleichgewichts vorbringt, wiegen hier folglich doppelt. Es ist nicht mehr realistisch anzunehmen, daß auch auf so weitgehend spezialisierten Märkten, die Preise von den Teilnehmern als Daten aufgefaßt werden - was eine der Voraussetzungen dieses Modells ist.

Auch wenn man - was geeigneter erscheint - das Modell des totalen Konkurrenzgleichgewichts normativ auffaßt, läßt sich eines nicht übersehen:
Der vorliegende Ansatz bietet keine Erklärung dafür, daß die einzelnen Wirtschaftssubjekte vielfach Geld oder Forderungen halten, die nicht auf spezifische Güter gerichtet sind, sondern im allgemeinen wiederum auf Geld[2].

---

1) Vgl. hierzu auch J. Hirshleifer [44] , S. 255.
2) Vgl. R. Radner [77] , S. 34.

Zwar schreibt Arrow[1]:

> In the actual world, risk-bearing is not allocated by the sale of claims against specific commodities. A simplified picture would rather be the following: securities are sold which are payable in money, the amount depending on the state s which has actually occurred (this concept is obvious for stocks; for bonds, we have only to recall the possibility of default if certain states occur); when the state s occurs, the money transfers determined by the securities take place, and then the allocation of commodities takes place through the market in the ordinary way, without further risk-bearing.
> It is not difficult to show that any optimal allocation or risk-bearing can be achieved by such a competitive system involving securities payable in money.

Die Nachfrage nach den erwähnten Wertpapieren kann jedoch bei Arrow erst ermittelt werden, wenn die von den Individuen i in jedem Zustand der Welt gewünschten optimalen Gütermengen bekannt sind[2]. Man muß sich fragen, warum deren Nachfrage dann nicht unmittelbar auf Güter gerichtet ist, warum also überhaupt Wertpapiere gehalten werden.

Arrow berücksichtigt die darin liegenden Risiken, daß bei gegebener Präferenzordnung nicht mit Sicherheit bekannt ist, welcher Zustand der Welt eintritt. Es scheint, daß daneben ein ganz spezifisches Unsicherheitsmoment wesentlich wird; es ist in der ungenauen Kenntnis über die eigenen Präferenzen im Zeitpunkt 2 begründet.

Wenn die Präferenzen im Zeitpunkt 2 nicht mit Sicherheit bekannt sind, besteht das "morgen" nicht nur darin, daß heute gefaßte Pläne ausgeführt werden[3]. Sie werden vielmehr erst morgen detailliert festgelegt, und es ist klar, daß neben dem heutigen Markt, auf

---

1) K.J. Arrow [6], S. 92.

2) Dies ergibt sich eindeutig aus Gleichung (4) bei Arrow ([6], S.93). Vergleiche auch die ähnliche Feststellung bei R. Radner [77], S. 35.

3) Vgl. R. Radner [77], S. 34.

dem bedingte Verträge abgeschlossen werden, auch morgige Kassamärkte existieren müssen[1]. Damit tritt neben die Unsicherheit über die Zustände der Welt das Risiko der Preisentwicklung. Der Wunsch nach Liquidität wird erklärbar. Er stellt nichts anderes dar als das Verlangen der Individuen, sich die "Lernfreiheit" in bestimmtem Maße zu bewahren, und er läßt sich wohl am einfachsten dadurch berücksichtigen, daß Güter (oder auf Güter gerichtete Verträge) nicht nur nach dem unmittelbaren Nutzen beurteilt werden, den sie beim Eintreffen der jeweiligen Zustände im Zeitpunkt 2 erbringen, sondern auch danach, inwieweit sie das Realvermögen[2] am Ende der Periode erhöhen. Letzteres kann als Argument in die Nutzenfunktion eingeführt werden[3]. So gesehen haben auch Forderungen (u.a. Geld) einen "Nutzen".

Dies ist nicht einfach ein "Trick", um die Nachfrage nach Forderungen erklären zu können, sondern eher ein Vorgehen, das sich an das von Arrow dargestellte anschließt. Bei Arrow bringt es dem Individuum i einen bestimmten Nutzen, wenn es weiß, daß ihm beim Eintreffen des Zustandes s vom Gut c die Menge x_{isc}

---

1) Wie das Zitat auf S. 1o7 zeigt, kann es auch in Arrow's Modell morgige Kassamärkte geben. Allerdings setzt dies voraus, daß die einzelnen Individuen heute bedingte Forderungen erwerben, die nicht auf Güter gerichtet sind, sondern auf Geld, wozu für sie keine besondere Veranlassung besteht.

2) Realvermögen = Nominalwert aller Vermögensgegenstände am Ende einer Periode dividiert durch einen Preisindex.

3) Davon wurde oben (insbesondere auf S. 84 ff.) schon vielfach Gebrauch gemacht. An dieser Stelle taucht im übrigen ein schwieriges Indexproblem auf. Mit welchem Preisindex sollen die Nominalgrößen des Endvermögens deflationiert werden? Der beste wäre zweifellos der, bei dem der tatsächlich in Periode 2 konsumierte Warenkorb zugrunde gelegt wird. Gerade dieser ist nicht bekannt. Wäre er bekannt, so müßte gesondert begründet werden, warum nicht direkt die in ihm enthaltenen Güter nachgefragt werden.

zur Verfügung steht. Hier hat das Individuum i einen Nutzen davon, daß es sicher sein darf, einen Teil seiner morgigen Wünsche auf Grund eines gewissen Realvermögens befriedigen zu können - es kann nur heute noch nicht genau angeben, auf welche Objekte sich diese Wünsche richten werden. Zieht man die Unsicherheit über die eigene Präferenzordnung nach Ablauf einer Periode in Betracht, so erscheint die Berücksichtigung des Realvermögens in der Nutzenfunktion nicht willkürlicher als die von irgendwelchen Gütern, die das Individuum beim Eintreffen bestimmter Zustände erhält.

Wird das Realvermögen am Ende der Periode in die Nutzenfunktion einbezogen, so hat das gewisse Konsequenzen.

Die genannte Größe ist wegen der nicht mit Sicherheit anzugebenden Preise im allgemeinen eine Zufallsvariable; sie unterliegt einer bestimmten Wahrscheinlichkeitsverteilung. Um letztere und damit den bei jeder Kombination von Gütern und Forderungen erreichbaren erwarteten Nutzen[1] angeben zu können, benötigen die Individuen Preiserwartungen. Im allgemeinen orientieren sich diese in erheblichem Maße an den Preisen der Vergangenheit[2].

Paretooptima - nunmehr als Zustände aufgefaßt, in denen sich der erwartete Nutzen keines Individuums erhöhen läßt, ohne daß der eines anderen verringert werden muß - lassen sich daher ohne Kenntnis der zeitlichen Entwicklung der Preise nicht angeben.

---

1) Es ist wichtig zu sehen, daß das Konzept des erwarteten Nutzens in der Analyse Arrows keine Rolle spielt. Der Grund liegt darin, daß bei ihm die Güter für jeden Zustand der Welt als getrennte Variable in die Nutzenfunktion eingehen.

2) So werden die für die Berechnung von Effizienzkurven benötigten Daten in der Regel aus - eventuell modifizierten - Zeitreihen gewonnen. Vgl. H.M. Markowitz [65] , S. 8 ff.

Dies bedeutet, daß bei der Frage nach zentraler oder dezentraler Planung auch der dynamische Aspekt eine wesentliche Rolle spielt.

Eine derartige Untersuchung wird hier nicht vorgeführt. Es sollte nur auf einige Punkte hingewiesen werden, die zeigen, wie wenig eine einfache Uminterpretation des statischen Modells der vollständigen Konkurrenz dem Moment der Unsicherheit letztlich Rechnung trägt.

Eine andere Art der Gleichgewichtsanalyse bei Risiko ist von Sharpe[1)] und insbesondere Lintner[2)] entwickelt worden. Sie ist wesentlich spezieller als die von Arrow; einerseits beschränkt sie sich auf Wertpapiermärkte, und anderseits legt sie auch dort ausschließlich Überlegungen im μ,σ-Diagramm zugrunde. Lintner postuliert, daß Investoren ihre Portefeuilles effizient anlegen, und zieht hieraus Schlüsse für die Gleichgewichtspreise (-kurse) auf dem Wertpapiermarkt. - Genauer soll darauf im folgenden eingegangen werden.

9.2. Die Analyse von Lintner

9.2.1. Darstellung

Die unten gebrachte Darstellung weicht von derjenigen ab, die Lintner[3)] selbst gewählt hat. Sie ist kürzer und erlaubt bei grundsätzlich gleichem Ergebnis die Weiterverwendung der bereits oben eingeführten Symbole.

---

1) W.F. Sharpe [94].
2) J. Lintner [57] und [56].
3) ebenda.

Lintner setzt voraus[1]:

a. Es gibt mehrere risikoscheue Wertpapierhalter. Ihre optimalen Portefeuilles wählen sie aus effizienten μ-Kombinationen im μ,σ-Diagramm[2].

b. Neben n-1 risikablen existiert ein risikoloses Wertpapier, das in Zukunft die Nummer 1 erhält. Dieses risikolose Papier ist mit dem festen Satz $\frac{(q_{12}-q_{11})}{q_{11}}$ verzinslich. Den Wertpapierhaltern steht es offen, zu diesem Zins beliebige Beträge anzulegen oder Kredite aufzunehmen; q_{11} ist fixiert.

c. Alle Anleger erwarten für die verschiedenen Papiere die gleichen Preise $\bar{q}_{j2}$ $(j=2,\ldots,n)$ und gehen davon aus, daß die Verteilung der Zufallsvariablen q_{j2} durch $\bar{q}_{j2}$ und die Standardabweichung beschrieben werden kann. Die Kovarianzen sind σ_{ij} $(i,j=2,\ldots,n)$. Wegen Voraussetzung b. gilt: $\bar{q}_{12}=q_{12}$ und $\sigma_{11}=\sigma_{1j}=0$ $(i,j=1,\ldots,n)$.

d. Die heutigen Preise werden als Daten angesehen.

e. Die Menge der von den risikablen Papieren emittierten Stücke ist fixiert und gleich y_j^o $(j=2,\ldots,n)$.

f. Bei der Ermittlung ihres optimalen Portefeuilles müssen alle Wertpapierhalter eine Budgetrestriktion von der Form (62) beachten. Weitere Einschränkungen gibt es für sie nicht.

---

1) J.F. Lintner [57], S. 674 f. und [56], S. 597 f. Es handelt sich nur um eine freie Wiedergabe der wichtigsten Voraussetzungen. Eine Modifikation liegt insoweit vor, als Lintner seiner Analyse die Bestimmung optimaler Anteile zugrunde legt, die von einem beliebigen Anfangsbetrag zum Erwerb einzelner Papiere aufgewandt werden. Entsprechend benutzt er die Preise nicht explizit, sondern Zinssätze. Um keine neue Symbolik einführen zu müssen, wurde die vorliegende Form gewählt. (Vgl. hierzu auch Fußnote 1, S. 52.) An den prinzipiellen Überlegungen Lintners ändert sich hierdurch nichts. Die Beziehung der verschiedenen Größen bei Lintner zu den hier benutzten ist in Anhang III gebracht.

2) Welche Kombinationen sie tatsächlich realisieren, wird bei Lintner nicht weiter ausgeführt.

Die Voraussetzung Lintners, daß alle Anleger die gleichen Erwartungen haben, wird hier noch weiter vereinfacht. Da in seiner Untersuchung der Verlauf der Indifferenzkurven im μ,σ-Diagramm ohne Bedeutung ist[1], stellt es keine sehr viel weitergehende Annahme dar, wenn wir statt von mehreren Anlegern mit gleichen Erwartungen nur von einem einzigen Investor (einer Art Robinson) ausgehen.

Im Gleichungssystem (63)[2] sind bereits die notwendigen Bedingungen dafür gegeben, daß dieser Wertpapierhalter sein Anfangsvermögen M_1 unter den genannten Voraussetzungen effizient anlegt. Wählt er die Größen y_j (j=2,...,n) gemäß (63), so wird jeder Wert μ^* des Vermögens am Ende der Periode unter Beachtung der Budgetrestriktion (62) mit minimaler Streuung σ^{2*} erreicht. Ist diese effiziente μ,σ-Kombination zudem optimal - d.h. ein Tangentialpunkt von Effizienz- und Indifferenzkurve - so liefert (63) bei gegebenen übrigen Größen die nachgefragten Mengen y_j (j=2,...,n) als Funktion der Preise q_{j1} (j=2,...,n). Ein Gleichgewicht auf den Märkten für die Papiere 2 bis n erfordert

$$(149)\quad y_j(q_{21},\ldots,q_{n1}) = y_j^o \qquad (j=2,\ldots,n)\ .$$

Wird y_j aus (149) in die ersten n-1 Gleichungen des Systems (63) eingesetzt, so folgt

$$(15o)\quad q_{j1} = \left[\bar{q}_{j2} + \frac{1}{\lambda}\sum_{k=2}^{n}\sigma_{jk}y_k^o\right]\frac{q_{11}}{q_{12}} \qquad (j=2,\ldots,n)$$

---

1) Er zeichnet zwar einige Indifferenzkurven in seinen graphischen Darstellungen ([57], S. 679; [56], S. 59o und 593), benutzt sie aber bei der expliziten Berechnung der Gleichgewichtspreise nicht. Siehe unten S.118 ff.

2) Seine Herleitung ist auf S.118 noch einmal vorgeführt.

und schließlich unter Beachtung der letzten Gleichung von (63):

$$(151) \qquad q_{j1} = \left[\bar{q}_{j2} - \frac{\mu^* - M_1 \frac{q_{12}}{q_{11}}}{\sum_{i=2}^{n} \sum_{k=2}^{n} \sigma_{1k} y_i^o y_k^o} \sum_{k=2}^{n} \sigma_{jk} y_k^o \right] \frac{q_{11}}{q_{12}}$$

$$j=2,\ldots,n$$

Dies sind nach Lintner[1] die Gleichgewichtspreise für die Papiere 2 bis n, wobei allerdings eines beachtet werden muß:

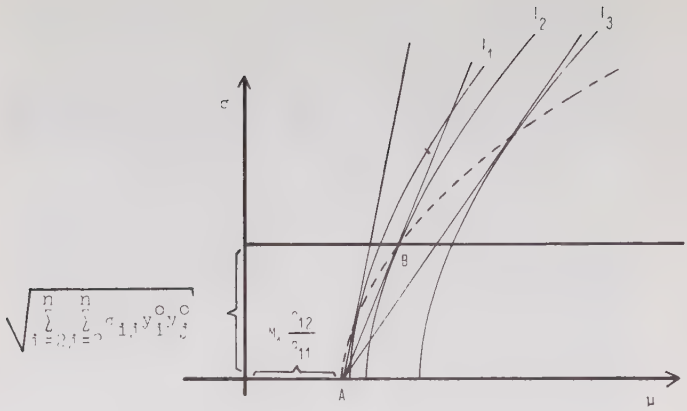
Der Ansatz (63) bestimmte die unter Beachtung der Budgetrestriktion zu jedem vorgegebenen μ^* gehörende minimale Streuung $(\sigma^2)^*$. Welche Kombination (μ^*,σ^*) tatsächlich gewählt wird, läßt sich ohne Kenntnis des Indifferenzkurvensystems nicht sagen. (151) gibt folglich nur die für alle Preise gemeinsame Grundstruktur an, mit deren Hilfe die tatsächlichen Gleichgewichtspreise erst ermittelt werden können, wenn das Indifferenzkurvensystem und damit μ^* bekannt ist.

Bevor wir auf diese und ähnliche Kritikgesichtspunkte im einzelnen eingehen, sei noch kurz erörtert, wie sich die oben aufgezeigte Gleichgewichtsanalyse im μ,σ-Diagramm darstellen läßt (siehe Figur 16).

Wir wissen wegen der Erläuterung auf S. 53 f., daß die Effizienzkurve im vorliegenden Fall eine Gerade ist, die durch den Punkt $A = (M_1 \frac{q_{12}}{q_{11}}; 0)$ geht. Wenn die zum gewählten Portefeuille gehörenden y_j-Werte der Gleichgewichtsforderung (149) genügen, ist seine Standardabweichung gleich $\left[\sum_{i=2}^{n} \sum_{j=2}^{n} \sigma_{ij} y_i^o y_j^o \right]^{\frac{1}{2}}$.

---

1) J.F. Lintner [56], S. 599 f. Beachte hierzu auch die Gleichungen (11) bis (16') bei Lintner und zum Vergleich mit der vorliegenden Darstellung Anhang III.



Figur 16

(149) entspricht also im μ,σ-Diagramm der Forderung, daß das gewählte Portefeuille auf einer Geraden liegt, die zur μ-Achse im Abstand $\left[\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}\sigma_{ij}y_i^o y_j^o\right]^{\frac{1}{2}}$ parallel verläuft.

Das Portefeuille, für das sich der eine Anleger entscheidet, muß anderseits optimal sein; die zugehörige μ,σ-Kombination muß sich als Tangentialpunkt von Effizienz- und Indifferenzkurve ergeben. Nun hat bei alternativen Preisen q_{j1} (j=2,...,n) die Effizienzkurve den gleichen Ausgangspunkt A auf der μ-Achse, jedoch unterschiedliche Steigung[1]. Zu jedem Vektor q_{j1} gehört daher ein spezieller Tangentialpunkt. Die Verbindung der Berührpunkte ist in Figur 16 gestrichelt gezeichnet - man kann sie sich als Pendant zur Preis-Konsumkurve der Haushaltstheorie[2] denken. Im Punkt B schneidet diese Kurve die oben erwähnte Parallele zur μ-Achse.

---

1) Vgl. hierzu die Herleitung der Effizienzkurve $\sigma^* = \sigma^*(\mu^*)$ aus Gleichungssystem (63) auf S. 52.

2) Vgl. R. Richter [79] , S. 34 f.

Man erkennt, daß die μ,σ-Kombination des Punktes B zwei Forderungen genügt:
a. Die zugehörigen y_j-Werte erfüllen die Gleichgewichtsbedingung (149).
b. Sie ist optimal.

Man kann daher sagen, daß sich im Gleichgewicht die Preise q_{j1} (j=2,...,n) so einstellen müssen, daß die Effizienzgerade durch A und B verläuft. Setzt man den zu B gehörenden Wert μ als μ^* in (151) ein, so erhält man die Größen q_{j1} (j=2,...,n) explizit.

9.2.2. Kritik

a. Der Hauptnachteil dieser Gleichgewichtsanalyse liegt wohl darin, daß die Nachfragefunktionen zwar normativ begründet werden, daß ihre Abhängigkeit vom Indifferenzkurvensystem jedoch nur sehr unzulänglich zum Ausdruck kommt. Lintner beschränkt sich darauf zu fordern, daß die gewählten Portefeuilles effizient sein müssen. Welche der effizienten Wertpapierkombinationen tatsächlich realisiert wird, bleibt unberücksichtigt.

Daraus resultiert das bereits oben festgehaltene Ergebnis, daß nur eine für alle Gleichgewichtspreise gemeinsame Grundstruktur (151) bestimmt wird, daß sich die Preise ohne Kenntnis von μ^* jedoch nicht ermitteln lassen.

b. Es handelt sich um eine Gleichgewichtsanalyse, bei der zwar das Verhalten der Nachfrager genauer untersucht, bei der aber für die Anbieter ein sehr starres Verhalten unterstellt wird.

In Punkt e. der Voraussetzungen war bereits erwähnt worden, daß die Zahl der emittierten Papiere konstant ist. Nun handelt es sich bei Wertpapieren nicht um irgendwelche Ressourcen, bei denen es als

Annäherung sinnvoll sein mag, von gewissen festen Beständen auszugehen. Vielmehr zeigten Überlegungen wie die auf S. 69 ff., daß die Höhe der von Unternehmungen aufgenommenen Kredite - und damit die Zahl der emittierten Papiere[1] - eine Funktion der Zinsen ist, was der von Lintner postulierten Annahme widerspricht.

Es liegt seiner Gleichgewichtsanalyse also ein Verhalten zugrunde, nach dem der einzelne Investor zwar Aktiva nach optimalen Portefeuillegesichtspunkten auswählt, nach dem ähnliche Überlegungen aber keineswegs auch für die Passiva angewandt werden[2].

Berücksichtigt man die optimale Finanzierung in der auf S. 69 ff. angegebenen Weise, so ist die Effizienzkurve in der Regel keine Gerade mehr. In diesem Fall kann für die Gleichgewichtspreise auch eine so allgemeine Aussage wie die in (151) enthaltene nicht mehr getroffen werden. Gleiches gilt immer dann, wenn die Effizienzkurve wegen weiterer Restriktionen als der durch die Budgetbeschränkungen gegebenen keine Gerade mehr ist[3].

Zwar betont Lintner[4], daß er nur diejenigen Auswirkungen auf die Gleichgewichtspreise untersuchen wolle, die sich aus dem Risiko "per se" ergeben. Doch wird etwa das Risiko der Illiquidität in keiner Weise bei ihm berücksichtigt.

c. Lintner erwähnt in einem Abschnitt[5] die Möglichkeit, daß die Erwartungen der einzelnen Anleger voneinander abweichen. Er folgert, daß sich an seiner Analyse in diesem Fall nur insofern etwas ändert,

---

1) Bei fixiertem Emissionskurs.
2) Siehe oben S. 69 ff.
3) Vgl. S. 64, Fußnote 1.
4) J. Lintner [57], S. 706.
5) J. Lintner [56], S. 600; vgl. auch oben S. 112.

als an die Stelle des 1. und 2. Summanden in der Klammer von Gleichung (151) gewichtete Größen treten. Die Gewichte lassen sich dabei aus den von den einzelnen Anlegern gehegten Erwartungen und den von ihnen realisierten Portefeuilles herleiten.

Bei einem solchen Vorgehen wird übersehen, daß die in die optimalen Portefeuilles zu investierenden DM-Beträge Funktionen der Größen q_{j1} $(j=2,\ldots,n)$ sind. Die zu wählenden Gewichte lassen sich daher ohne Kenntnis der Gleichgewichtspreise q_{j1} gar nicht angeben - sie können bei deren Ermittlung also auch nicht zugrunde gelegt werden.

d. Wie speziell der Ansatz Lintners ist, wird aus der Antwort auf folgende Frage klar:
Welchen Einfluß auf q_{j1} $(j=2,\ldots,n)$ hat eine Änderung von $\bar{q}_{i2}$, wenn angenommen wird, daß die Größen M_1, $\frac{q_{12}}{q_{11}}$, σ_{ij}, y_j^o $(i,j=2,\ldots,n)$ und $\bar{q}_{k2}$ $(2\leq k\leq n; k\neq i)$ gleich bleiben?
Wir betrachten hierzu die Gleichung (151). $\bar{q}_{i2}$ erscheint darin nicht explizit, und es ist bereits durch die Annahmen festgelegt, daß alle rechts stehenden Größen - mit der eventuellen Ausnahme von μ^* - bei einer Änderung von $\bar{q}_{i2}$ konstant bleiben.

Auf Grund der Überlegungen zu Figur 16 wissen wir, daß die Effizienzkurve im Gleichgewicht durch die Punkte A und B gehen muß und im übrigen linear ist.

Beachten wir die Konstruktion des Punktes B, so sehen wir, daß sich seine Lage unter den gemachten Annahmen bei Variation von $\bar{q}_{i2}$ und unverändertem Indifferenzkurvensystem nicht verschoben haben kann. Auch sein Abszissenwert bleibt somit der gleiche. Dieser Wert war es aber, den wir für μ^* in (151) einsetzten.

q_{j1} ist also unabhängig von $\bar{q}_{12}$ $(i,j=2,\ldots,n;i\neq j)$, und es gilt

$$(152)\qquad \frac{dq_{j1}}{d\bar{q}_{j1}} = \frac{q_{11}}{q_{12}} = \frac{1}{1+\frac{q_{12}-q_{11}}{q_{11}}} \quad .$$

Die Änderung des heutigen Preises q_{j1} ist gleich der mit dem Zinssatz für die sichere Anlage diskontierten Änderung des erwarteten Preises q_{j2}. Erstaunlich hieran ist, daß sich die Änderung des erwarteten Preises für ein bestimmtes Papier nur auf den heutigen Preis des gleichen Papiers auswirkt.

e. Es war erwähnt worden, daß Lintner die Relation (151) auf andere Weise herleitet, als es hier geschah. Eine kurze Gegenüberstellung beider Ansätze erscheint angebracht.
Dem hier benutzten Gleichungssystem (63) lag die Lagrangefunktion

$$(153)\qquad L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}y_iy_j+\lambda_1\Big(\sum_{j=1}^{n}y_j\bar{q}_{12}-\mu^*\Big)$$

$$+\lambda_2\Big(\sum_{j=1}^{n}y_jq_{j1}-M_1\Big)$$

zugrunde[1], d.h. die Streuung $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}y_iy_j$ sollte für einen bestimmten Wert $\mu = \mu^*$ unter Beachtung der Budgetrestriktion minimiert werden. Unter der Voraussetzung, daß Papier 1 risikolos ist, läßt sich (153) umformen in

$$(154)\qquad L = \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}\sigma_{ij}y_iy_j+\lambda_1\left[\sum_{j=2}^{n}y_j\Big(\bar{q}_{j2}-q_{j1}\frac{q_{12}}{q_{11}}\Big)-\Big(\mu^*-M_1\frac{q_{12}}{q_{11}}\Big)\right]$$

1) Vgl. oben (46) und die Erläuterungen auf S. 52.

Die notwendigen Bedingungen für ein Maximum von (154) führen zum Gleichungssystem (63), d.h.

$$(63)\qquad \begin{aligned} &\sum_{j=2}^{n} \sigma_{ij} y_j + \lambda_1 (\bar{q}_{i2} - q_{i1} \frac{q_{12}}{q_{11}}) = 0; \quad (i=2,\ldots,n) \\ &\sum_{j=2}^{n} y_j (\bar{q}_{j2} - q_{j1} \frac{q_{12}}{q_{11}}) - (\mu^* - M_1 \frac{q_{12}}{q_{11}}) = 0; \end{aligned}$$

Werden die Lösungen von (63) in μ und σ eingesetzt, so erhält man die effizienten Kombinationen μ^*, σ^*. Alle Punkte (μ^*,σ^*) liegen - wie die Erörterung auf S. 53 zeigte - auf einer Geraden durch

$$A = (\frac{M_1 q_{12}}{q_{11}}; 0) .$$

Lintner hingegen maximiert (in unserer Symbolik) den offenbar als Präferenzfunktion aufgefaßten Ausdruck[1)]

$$(155)\qquad \Theta = \frac{\sum_{j=1}^{n} y_j (\bar{q}_{j2} - q_{j1} \frac{q_{12}}{q_{11}})}{\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} y_i y_j\right]^{\frac{1}{2}}}$$

bzw., da das Papier 1 als risikolos unterstellt wird,

$$(156)\qquad \Theta = \frac{\sum_{j=2}^{n} y_j (\bar{q}_{j2} - q_{j1} \frac{q_{12}}{q_{11}})}{\left[\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} \sigma_{ij} y_i y_j\right]^{\frac{1}{2}}}$$

Werden die partiellen Ableitungen von (156) nach y_i $(i=2,\ldots,n)$ gleich Null gesetzt, so ergibt sich:

$$(157)\qquad \sum_{j=2}^{n} \sigma_{ij} y_j - \frac{\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} \sigma_{ij} y_i y_j}{\sum_{j=2}^{n} y_j (\bar{q}_{j2} - q_{j1} \frac{q_{12}}{q_{11}})} (\bar{q}_{i2} - q_{11} \frac{q_{12}}{q_{11}}) = 0 .$$

$(i=2,\ldots,n)$

(157) gilt dann und nur dann, wenn die ersten n-1 Gleichungen aus (63) erfüllt sind:

---

1) J. Lintner [57], S. 683 f. bzw. [56], S. 595 f.; vgl. zur Interpretation insbesondere S. 681.

Beweis:
Daß (157) aus den ersten n-1 Gleichungen von (63) folgt, sieht man sofort, wenn man die letzteren nach Multiplikation jeder Gleichung mit y_i addiert und das aus dieser Summe eliminierte λ_1 in die i-te Gleichung einsetzt.
Sei umgekehrt (157) gegeben, so erkennt man zunächst, daß mit jedem Lösungsvektor $\mathfrak{y}^\circ = [y_2^\circ,\ldots,y_n^\circ]$ auch $k\cdot\mathfrak{y}^\circ$ ein Lösungsvektor ist, wobei k eine beliebige Konstante darstellt. Jede Lösung muß also die Gleichungen

$$(158)\qquad \sum_{j=2}^{n}\sigma_{ij}y_j - k\,\frac{\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}\sigma_{ij}y_i^\circ y_j^\circ}{\sum_{j=2}^{n}y_j^\circ(\bar{q}_{j2}-q_{j1}\frac{q_{12}}{q_{11}})}(\bar{q}_{i2}-q_{i1}\frac{q_{12}}{q_{11}}) = 0;\qquad (i=2,\ldots,n)$$

erfüllen, wenn $\mathfrak{y}^\circ$ eine bestimmte Lösung und

$$C = \frac{\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}\sigma_{ij}y_j^\circ y_i^\circ}{\sum_{j=2}^{n}y_j^\circ(\bar{q}_{j2}-q_{j1}\frac{q_{12}}{q_{11}})}$$

daher eine Konstante ist. Mit k ist auch $k\cdot C$ eine beliebige Konstante. Anderseits ist auch λ_1 in den ersten n-1 Gleichungen von (63) ohne Berücksichtigung der letzten Gleichung eine beliebige Konstante. Damit ist gezeigt, daß aus (158) die ersten n-1 Gleichungen aus (63) folgen. Die letzte Gleichung aus (63) dient nur dazu, den Proportionalitätsfaktor λ_1 als Funktion von μ^* eindeutig zu bestimmen, und damit einen Punkt auf der durch

$$A = (M_1\,\frac{q_{12}}{q_{11}};0)$$

verlaufenden Effizienzkurve (hier einer Geraden) herauszugreifen - eben denjenigen mit dem Abszissenwert μ^*. (Welche μ^*,σ^*-Kombination tatsächlich

realisiert wird, hängt freilich vom Indifferenzkurvensystem ab.)

Lintner gibt seinem Ansatz - der dem oben gewählten als gleichwertig erkannt wurde - eine besondere Interpretation. Wir müssen ihn hierzu etwas ausführlicher zitieren[1]:

> "One crucial premise was investor risk-aversion in the form of preference for expected return and preference against return-variance, ceteris paribus. We noted that Tobin has shown that either concave-quadratic utility functions or multivariate normality (of probability assessments) and any concave utility were sufficient conditions to validate this premise, but they were not shown (or alleged) to be necessary conditions. This is probably fortunate because the quadratic utility of income (or wealth!) function in spite of its popularity in theoretical work, has several undesirably restrictive and implausible properties, and, despite its mathematical convenience, multivariate normality is doubtless also suspect, especially perhaps in considering common stocks.
>
> It is, consequently, very relevant to note hat by using the Bienaymê-Tschebycheff inequality, Roy has shown that investors operating on his "Safety First" principle (i.e. make risky investments so as to minimize the upper bound of the probability that the realized outcome will fall below a pre-assigned "disaster level") should maximize the ratio of the excess expected portfolio return (over the disaster level) to the standard deviation of the return on the portfolio (oben
>
> entspricht dem $\frac{\mu - M_1 \frac{q_{12}}{q_{11}}}{\sigma}$ aus (156); A.d.V.)...
>
> This result, of course, does not depend on multivariate normality, and uses a different argument and form of utility function.

In einer Fußnote hierzu stellt Lintner fest:

> Roy also notes that when judgmental distributions are multivariate normal, maximization of this criterion minimizes the probability of "disaster". It shold be noted, however, minimization of the probability of short falls from "disaster" levels

---

1) J. Lintner [57] , S. 68o f.

> in this "normal" case is strictly equivalent to expected utility maximization under all risk-averters' utility functions. The equivalence is not restricted to the utility function of the form (o,1) (zero if "disaster" occurs, one if it doesn't), as claimed by Roy ... and Markowitz ..."

Die letzte Aussage ist falsch.
Roy[1] stellt bereits fest, daß bei Normalverteilungen die Wahrscheinlichkeit für $M_2 = \sum_{j=1}^{n} y_j q_{j2} \leq M_1 \frac{q_{12}}{q_{11}}$ genau dann minimiert wird, wenn (156) ein Maximum erreicht. Weiterhin haben wir gesehen, daß die notwendigen Bedingungen für ein Maximum von (156) dann und nur dann erfüllt sind, wenn die gewählte μ,σ-Kombination effizient ist.

Nun erfordert zwar die Maximierung des erwarteten Nutzens bei einem "risk-averter", daß ausschließlich effiziente Kombinationen realisiert werden. Es gilt aber keineswegs umgekehrt, daß unter den gleichen Annahmen jede effiziente Kombination den erwarteten Nutzen maximiert - auch unter der Annahme der Normalverteilung nicht. Die von Lintner im angeführten Zitat betonte "equivalence" liegt nicht vor.

Die Feststellung von Roy[2] und Markowitz[3], daß eine ganz bestimmte Nutzenfunktion impliziert wird, wenn man

$$(156) \quad \Theta = \frac{\sum_{j=2}^{n} y_j (\bar{q}_{j2} - q_{j1}\frac{q_{12}}{q_{11}})}{\left[\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} \sigma_{ij} y_1 y_j\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\mu - M_1 \frac{q_{12}}{q_{11}}}{\sigma} = \Psi(\mu,\sigma)$$

---

1) A.D. Roy [83], S. 434.
2) A.D. Roy [83], S. 432.
3) H. Markowitz [65], S. 293.

als Präferenzfunktion Ψ über μ und σ auffaßt, ist folglich nicht widerlegt. Der Verlauf dieser Funktion wurde neuerdings auch von Schneeweiß[1] angegeben.

In der hier verwandten Symbolik gilt:

$$(159)\quad U(M_2) = \begin{cases} 1 \text{ , wenn } M_2 > M_1 \dfrac{q_{12}}{q_{11}} \\ 0 \text{ , wenn } M_2 \leqq M_1 \dfrac{q_{12}}{q_{11}} \end{cases}$$

Offensichtlich handelt es sich um eine sehr spezielle Form.

Interpretiert man daher (156) in der angegebenen Weise als Präferenzfunktion über μ und σ, so ist hierdurch - entgegen Lintners eigenen Feststellungen - kaum eine größere Realitätsnähe gesichert als in den von ihm zuerst zitierten Fällen.

Im übrigen mußte selbst für die spezielle Nutzenfunktion (159) die Annahme der Normalverteilung gemacht werden[2]. Die oben zitierte Aussage

> "This result ... does not depend on multivariate normality, and uses a different argument and form of utility function"

ist in diesem Punkt unklar.

Wenn für die zugelassenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen von $M_2 = \sum_{j=1}^{n} y_j q_{j2}$ keine Einschränkungen vorgenommen werden, dann ist die Präferenzfunktion (156) nach dem Bernoulli-Prinzip nicht rational[3]. Es gibt in diesem Fall also gar keine zugehörige Nutzenfunktion.

Wenn jedoch Einschränkungen vorliegen, so müßte angegeben werden, welche es sind, und welche (plausible?) Form der Nutzenfunktion sie implizieren.

---

1) H. Schneeweiß [98] , S. 153.
2) Vgl. ebenda.
3) Allein die quadratische Nutzenfunktion ist in diesem Fall mit dem Bernoulli-Prinzip vereinbar. (Siehe H. Schneeweiß [98] , S. 96 und oben S. 46, Fußnote 2).

Schließlich ist eines nur schwer zu erklären: Lintner betont, daß sich seine Zielfunktion (156) mit der Präferenzfunktion von Roy deckt. Trotzdem benutzt er in seinen graphischen Darstellungen die üblichen zur μ-Achse streng konkav gekrümmten Indifferenzkurven - macht also von der ihm so wichtig erscheinenden Intepretationsmöglichkeit gar keinen Gebrauch (ohne dies ausdrücklich zu erwähnen). Denn die Verwendung von (156) als Präferenzfunktion impliziert bereits einen bestimmten Indifferenzkurvenverlauf. Er ist - wie man für

$$\Psi(\mu,\sigma) = \frac{\mu - M_1 \frac{q_{12}}{q_{11}}}{\sigma} = \text{konstant}$$

leicht sieht - durch ein Geradenbüschel mit dem Schnittpunkt in

$$A = (M_1 \frac{q_{12}}{q_{11}}; 0)$$

gegeben.

Unter den speziellen Voraussetzungen Lintners fällt allerdings die Indifferenzkurve maximal erreichbaren Nutzens ganz mit der Effizienzkurve (einer Geraden) zusammen. Vielleicht hat dies dazu beigetragen, daß Lintner die Möglichkeit, seine Zielfunktion nach Roy zu interpretieren, letztlich gar nicht nutzt.

IV. Die Einbeziehung der Financial Intermediaries in ein makroökonomisches Modell

1o. Der Einfluß der Mindestreserven auf die Wirksamkeit der Offenmarktpolitik

Die bisher bei der Portefeuilleanalyse behandelten Ansätze waren normativer Art. In ihnen kam die Preisabhängigkeit der angebotenen[1] und nachgefragten Wertpapiermengen klar zum Ausdruck, wenn auch keine eindeutigen Aussagen über die Wirkungen einer Preisänderung gemacht werden konnten - genau so wenig wie im Rahmen der (normativen) Konsumtheorie. Im folgenden wollen wir uns einem positiven makroökonomischen Modell zuwenden, wobei der finanzielle Sektor weiter aufgegliedert und die Zinsen als unabhängige Variablen explizit berücksichtigt werden sollen.

Insbesondere die Bedeutung der Mindestreserven und der Nonmonetary Financial Intermediaries (NFI)[2] erscheint bei einem solchen Ansatz in anderem Licht als im Rahmen der üblichen Geldschöpfungstheorie[3]. Richter[4] hat bereits gezeigt, daß Mindestreserven nicht notwendigerweise - wie etwa Einkommensteuern - stabilisierend im komparativ statischen Sinne wirken. Im Rahmen des vorliegenden Modells wird dieses Ergebnis bestätigt und einer leichten Interpretation zugänglich gemacht. Weiterhin läßt sich zeigen, daß das Anwachsen der NFI keineswegs eindeutig zu einer Verschlechterung der geldpolitischen Effizienz führt - wie überwiegend behauptet wird[5].

---

1) Vgl. hierzu den Ansatz aus 7.3.4. auf S. 69 ff.

2) Vgl. Fußnote 3 auf S. 5.

3) Vgl. Fußnote 2 und 4 auf S. 5

4) R. Richter [8o].

5) Vgl. J.Aschheim [8], S.13o; E.C.Ettin [24]; J.G.Gurley and E.S.Shaw [36], S.537 und [37], S.245; A.Lindbeck [55], S.184; D.Patinkin [73], S.2o9 f.; W.L. Smith [97], S.539; R.S.Thorn [1o8], S. 375-78.

Es werden folgende Symbole benutzt:

C	= Konsum
I	= Investition
Y	= Volkseinkommen
D_{H1} (bzw. D_{B1}, bzw. D_{F1})	= Nachfrage der Haushalte und nichtfinanziellen Unternehmungen (bzw. der Banken bzw. der NFI) nach Zentralbankgeld
D_{H2} (bzw. D_{F2})	= Nachfrage der Haushalte und nichtfinanziellen Unternehmungen (bzw. der NFI) nach Sichteinlagen bei den Kreditbanken
D_{H3} (bzw. D_{B3})	= Nachfrage der Haushalte und nichtfinanziellen Unternehmungen (bzw. der Kreditbanken) nach Einlagen bei den NFI
D_{H4} (bzw. D_{B4}, bzw. D_{F4})	= Nachfrage der Haushalte (bzw. der Kreditbanken bzw. der NFI) nach Bonds
$\overline{S}_1$	= Angebot von Zentralbankgeld bzw. Nachfrage der Zentralbank nach Bonds
S_{B2}	= Angebot von Sichteinlagen durch die Kreditbanken
S_{F3}	= Angebot von Einlagen durch die NFI
S_{U4}	= Angebot von Bonds durch die nichtfinanziellen Unternehmungen
r_1	= Zins für Zentralbankgeld (=0)
r_2	= Zins für Sichteinlagen bei den Kreditbanken
r_3	= Zins für Einlagen bei den NFI
r_4	= Zins für Bonds
D_{Hi,r_j}	= Partielle Ableitung von D_{Hi} nach r_j $(i,j=1,\ldots,4)$. Analog werden andere partielle Ableitungen z.B. nach Y oder bestimmten Parametern bezeichnet.
ρ	= Mindestreservesatz der Kreditbanken
γ	= Lage-Parameter in der Kreditnachfragefunktion der Unternehmungen
β	= Lage-Parameter in der Nachfragefunktion für Zentralbankgeld bzw. für Sichteinlagen bei Kreditbanken

Wir gehen vom nachstehenden einfachen Gleichungssystem aus:

Version I:

(160) (1) $C(Y,r_2)+I(r_4) = Y$

(Gleichgewichtsbedingung auf dem Gütermarkt)

(161) (2) $D_{H1}(Y,r_2)+D_{B1}(r_2,r_4) = \overline{S}_1$

(Gleichgewichtsbedingung auf dem Markt für Zentralbankgeld)

(162) (3) $D_{H2}(Y,r_2) = S_{B2}(r_2,r_4)$
(Gleichgewichtsbedingung auf dem Markt für Sichteinlagen bei Kreditbanken)

(163) (4) $D_{B4}(r_2,r_4)+\bar{S}_1 = S_{U4}(r_4)+\gamma$
(Gleichgewichtsbedingung auf dem Bonds-Markt)

Exogen: $\bar{S}_1$, γ
Endogen: Y, r_2, r_4

Da wegen des Walras-Gesetzes von diesen 4 Gleichungen nur 3 von einander unabhängig sind, genügt es bei der weiteren Diskussion, allein (161) - (163) zu berücksichtigen. Unter geeigneten Bedingungen ist dieses System nach den drei endogenen Variablen lösbar. Um deren Abhängigkeit von den exogenen Variablen aufzeigen zu können, werden folgende Verhaltensannahmen gemacht:

$$D_{H1,Y} > 0 \; ; \; i = 1,2$$
$$D_{H1,r_2} \lesseqgtr 0 \; ; \; D_{H2,r_2} > 0 \; ; \; \sum_{i=1}^{2} D_{Hi,r_2} > 0$$
(164) $$D_{B1,r_2} \lesseqgtr 0 \; ; \; -S_{B2,r_2} > 0 \; ; \; D_{B4,r_2} \lesseqgtr 0$$
$$D_{B1,r_4} \lesseqgtr 0 \; ; \; -S_{B2,r_4} \lesseqgtr 0 \; ; \; D_{B4,r_4} > 0$$
$$S_{U4,r_4} < 0 \; ;$$

Wegen der Bilanzrestriktion für die Kreditbanken ist die Summe der in der 3. und 4. Zeile von (164) stehenden Koeffizienten gleich Null. Totale Differentiation von (160) - (163) führt zu

(165)

$$\begin{bmatrix} D_{H1,Y} & D_{H1,r_2}+D_{B1,r_2} & D_{B1,r_4} \\ D_{H2,Y} & D_{H2,r_2}-S_{B2,r_2} & -S_{B2,r_4} \\ 0 & D_{B4,r_2} & D_{B4,r_4}-S_{U4,r_4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_x \\ r_{2,x} \\ r_{4,x} \end{bmatrix} = \overset{x=\bar{S}_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}} \text{ bzw. } = \overset{x=\gamma}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Um Aussagen über die Vorzeichen der Lösungen von (165) machen zu können, benutzen wir die bei Brainard[1)] für bestimmte Determinanten angegebenen Sätze, die in Anhang IV aufgeführt werden. Wenn wir daher im folgenden sagen, eine Determinante sei vom Typ 1 (bzw. 2), so ist damit gemeint, daß sie die Voraussetzungen von "Proposition" 1 (bzw. 2) in Anhang IV erfüllt und damit positiv (bzw. negativ) ist. Zur erleichterten Übersicht werden
a. über alle Elemente der jeweils ausgeschriebenen Determinante die Vorzeichen gesetzt,
b. -falls möglich und erforderlich - in Klammer die elementaren Umformungen angeführt, die die ausgeschriebene Determinante in den Typ 1 oder 2 verwandeln.
Aus (165) folgt damit:

(166)

$$J_I = \begin{vmatrix} >0 & \leqq 0 & \leqq 0 \\ D_{H1,Y} & D_{H1,r_2}+D_{B1,r_2} & D_{B1,r_4} \\ >0 & > 0 & \leqq 0 \\ D_{H2,Y} & D_{H2,r_2}-S_{B2,r_2} & -S_{B2,r_4} \\ 0 & \leqq 0 & > 0 \\ & D_{B4,r_2} & D_{B4,r_4}-S_{U4,r_4} \end{vmatrix} > 0$$

(Nach Multiplikation der ersten Spalte mit -1 hat die Determinante $-|J_I|$ die Form von Typ 2.)

Setzt man in (165) $x=\bar{S}_1$, so erhält man nach der Cramer'schen Regel:

(167)

$$Y_{\bar{S}_1} = \frac{1}{|J_I|} \cdot \begin{vmatrix} > 0 & \leqq 0 \\ D_{H2,r_2}-S_{B2,r_2} & -S_{B2,r_4} \\ \leqq 0 & > 0 \\ D_{H1,r_2}+D_{B1,r_2}+D_{B4,r_2} & D_{B1,r_4}+D_{B4,r_4}-S_{U4,r_4} \end{vmatrix} > 0$$

1) W.C. Brainard [15] , S. 139 f.

(168)

$$r_{2,\overline{S}_1} = \frac{-1}{|J_I|} \begin{vmatrix} > 0 & \leqq 0 \\ D_{H2,Y} & -S_{B2,r_4} \\ > 0 & > 0 \\ D_{H1,Y} & D_{B1,r_4}+D_{B4,r_4}-S_{U4,r_4} \end{vmatrix} < 0$$

(Nach Multiplikation der ersten Spalte mit -1 hat die Zählerdeterminante die Form von Typ 2.)

(169)

$$r_{4,\overline{S}_1} = \frac{1}{|J_I|} \begin{vmatrix} > 0 & > 0 \\ D_{H2,Y} & D_{H2,r_2}-S_{B2,r_2} \\ > 0 & \leqq 0 \\ D_{H1,Y} & D_{H1,r_2}+D_{B1,r_2}+D_{B4,r_2} \end{vmatrix} < 0$$

(Das Vertauschen der ersten und zweiten Zeile, sowie die Multiplikation der ersten Spalte mit -1 führt die Zählerdeterminante in den Typ 2 über.)

Entsprechend folgt aus (165) mit x = y

(17o)

$$Y_y = \frac{1}{|J_I|} \begin{vmatrix} \leqq 0 & \leqq 0 \\ D_{H1,r_2}+D_{B1,r_2} & D_{B1,r_4} \\ > 0 & \leqq 0 \\ D_{H2,r_2}-S_{B2,r_2} & -S_{B2,r_4} \end{vmatrix} \gtrless 0$$

(Die Zählerdeterminante kann hier nicht in den Typ 1 oder 2 übergeführt werden, doch erkennt man die Richtigkeit der Ungleichung (17o) wegen $|J_I| > 0$ auch unmittelbar.)

(171)

$$r_{2,Y} = \frac{-1}{|J_I|} \cdot \begin{vmatrix} > 0 & \leqq 0 \\ D_{H1,Y} & D_{B1,r_4} \\ > 0 & \leqq 0 \\ D_{H2,Y} & -S_{B2,r_4} \end{vmatrix} \gtreqless 0$$

(Die Zählerdeterminante läßt sich weder auf Typ 1 noch auf Typ 2 zurückführen.)

(172)

$$r_{4,Y} = \frac{1}{|J_I|} \begin{vmatrix} > 0 & \leqq 0 \\ D_{H1,Y} & D_{H1,r_2} + D_{B1,r_2} \\ > 0 & > 0 \\ D_{H2,Y} & D_{H2,r_2} - S_{B2,r_2} \end{vmatrix} > 0$$

(Nach Multiplikation der ersten Spalte mit -1 hat die Zählerdeterminante die Form von Typ 2.)

Die vorliegenden Ergebnisse sind von der gewohnten Form. - Um die Rolle der Mindestreserven diskutieren zu können, wird Version I durch folgende Annahmen modifiziert:

a. Der Zinssatz r_2 wird auf dem Niveau $\bar{r}_2$ fixiert. $\bar{r}_2$ sei niedriger als der Gleichgewichtszins auf dem Markt für Sichteinlagen bei den Kreditbanken, so daß letztere alle Einlagen entgegennehmen, die ihnen angeboten werden.

b. Die Kreditbanken werden verpflichtet, ρ% ihrer Einlagen in Form von Zentralbankgeld zu halten. Es sei unterstellt, daß der freiwillig gehaltene Prozentsatz nicht höher ist - die Kreditbanken wollen also keine Überschußreserven anlegen.

c. Die Haushalte fragen unmittelbar Bonds nach. Wenn auf die explizite Angabe von $\bar{r}_2$ in den einzelnen Funktionen verzichtet wird, folgt daraus

Version II:

(173) $D_{H1}(Y,r_4)+\rho D_{H2}(Y,r_4) = \bar{S}_1$

(174) $D_{H4}(Y,r_4)+(1-\rho)D_{H2}(Y,r_4)+\bar{S}_1 = S_{U4}(r_4)+\gamma$.

(164) wird um die Annahmen

(175) $D_{H4,Y}>0$, $D_{Hi,r_4}\leqq 0$ für $i=1,2$ und $D_{H4,r_4}>0$

erweitert. An die Stelle von $\sum_{i=1}^{2} D_{Hi,r_2}>0$ tritt nun $\sum_{i=1,2,4} D_{Hi,r_4}>0$.

Differenzieren wir das System (173) und (174), so ergibt sich

(176)

$$\begin{bmatrix} \overset{>0}{D_{H1,Y}}+\rho D_{H2,Y} & \overset{\leqq 0}{D_{H1,r_4}}+\rho D_{H2,r_4} \\ \overset{>0}{D_{H4,Y}}+(1-\rho)D_{H2,Y} & \overset{>0}{D_{H4,r_4}}+(1-\rho)D_{H2,r_4}-S_{U4,r_4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_x \\ r_{4,x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \overset{x=\bar{S}_1}{\text{bzw.}} \overset{x=\gamma}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Die zugehörige Koeffizientendeterminante wird nach Multiplikation der ersten Spalte mit -1 in eine Form des Typs 2 verwandelt, woraus

(177) $|J_{II}| > 0$

resultiert. Die Lösung von (176) mit Hilfe der Cramerschen Regel liefert[1]:

(178) $$Y_{\bar{S}_1} = \frac{1}{|J_{II}|}\left[\sum_{i=1,2,4} D_{Hi,r_4} - S_{U4,r_4}\right] > 0$$

(179) $$r_{4,\bar{S}_1} = \frac{-1}{|J_{II}|}\left[\sum_{i=1,2,4} D_{Hi,Y}\right] < 0$$

1) In der Zählerdeterminante werden jeweils die erste und die zweite Zeile addiert.

$$(18o) \quad Y_Y = \frac{-1}{|J_{II}|}\left[D_{H1,r_4}+\rho D_{H2,r_4}\right] \gtreqless 0$$

$$(181) \quad r_{4,Y} = \frac{1}{|J_{II}|}\left[D_{H1,Y}+\rho D_{H2,Y}\right] > 0$$

Es wird leicht bestätigt, daß

$$(182) \quad \frac{d|J_{II}|}{d\rho} = D_{H2,Y}\left(\sum_{i=1,2,4} D_{Hi,r_4}-S_{U4,r_4}\right)$$

$$- D_{H2,r_4}\left(\sum_{i=1,2,4} D_{Hi,Y}\right) > 0$$

und somit wegen (178) und (18o) gilt:

$$(183) \quad \frac{d(Y_{\overline{S}_1})}{d\rho} = \frac{-\left(\sum_{i=1,2,4} D_{Hi,r_4}-S_{U4,r_4}\right)\frac{d|J_{II}|}{d\rho}}{|J_{II}|^2} < 0$$

und

$$(184) \quad \frac{d(Y_Y)}{d\rho} = (D_{H1,r_4}\cdot D_{H2,Y}-D_{H1,Y}\cdot D_{H2,r_4})\cdot$$

$$\cdot \frac{\left(\sum_{i=1,2,4} D_{Hi,r_4}-S_{U4,r_4}\right)}{|J_{II}|^2} \gtreqless 0$$

Sieht man $Y_{\overline{S}_1}$ als Maßstab für die Wirksamkeit der Offenmarktpolitik an[1], so bedeutet eine Erhöhung des Mindestreservesatzes ρ im vorliegenden Modell also auf jeden Fall, daß sich die Effizienz der Offenmarktpolitik verringert. Darüberhinaus wirkt

---

1) Vgl. W.C. Brainard [15], S. 112 f.; J.G. Gurley and E.S. Shaw [37], S. 245; R. Richter [8o]; J. Tobin and W.C. Brainard [11o], S. 77 ff.. Sehr kritisch äußert sich Brainard [16], S. 411 dazu, daß bestimmte Ableitungen als Maßstab für die Effizienz der Offenmarktpolitik verwendet werden. Wir kommen darauf weiter unten noch zurück.

eine Erhöhung von ρ bei Zufallsstörungen von γ (und damit der Investitionen) nur dann stabilisierend auf das Volkseinkommen, wenn

$$(185) \quad \frac{D_{H1,r_4}}{D_{H2,r_4}} < \frac{D_{H1,Y}}{D_{H2,Y}} \quad .$$

Dieses Ergebnis scheint erstaunlich und zwar insbesondere dann, wenn man es mit der built-in-flexibility von Einkommensteuern vergleicht[1]. Es soll daher zunächst überprüft werden, ob auch im vorliegenden Ansatz ein hoher marginaler Einkommensteuersatz - nach geeigneter Modifikation des Modells - stabilisierend wirkt.

Wir nehmen hierzu an, daß ein Anteil t vom Volkseinkommen durch die Haushalte und nichtfinanziellen Unternehmungen als Steuer an den Staat abgeführt werden muß, und daß dieser dafür Zentralbankgeld hält. Es ergibt sich die

Version III:

$$(186) \quad D_{H1}(Y(1-t),r_4)+\rho D_{H2}(Y(1-t),r_4)+tY = \overline{S}_1$$

$$(187) \quad D_{H4}(Y(1-t),r_4)+(1-\rho)D_{H2}(Y(1-t),r_4)+\overline{S}_1 = S_{U4}(r_4)+\gamma$$

Analog zu oben folgt:

$$(188) \quad |J_{III}| > 0 \qquad \text{und}$$

$$(189) \quad Y_{\overline{S}_1} = \frac{1}{|J_{III}|}\left(\sum_{i=1,2,4} D_{Hi,r_4} - S_{U4,r_4}\right) > 0$$

$$(190) \quad r_{4,\overline{S}_1} = \frac{-1}{|J_{III}|}\left((1-t)\left(\sum_{i=1,2,4} D_{Hi,Y}\right)+t\right) < 0$$

---

1) Vgl. R. Richter [8o].

$$(191)\quad Y_Y = \frac{-1}{|J_{III}|}(D_{H1,r_4} + \rho D_{H2,r_4}) \gtreqless 0$$

$$(192)\quad r_{4,Y} = \frac{1}{|J_{III}|}((1-t)(D_{H1,Y} + \rho D_{H2,Y}) + t)$$

Weiterhin gilt:

(193)

$$\frac{d|J_{III}|}{dt} = \begin{vmatrix} > 0 & \gtreqless 0 \\ 1-D_{H1,Y}-\rho D_{H2,Y} & D_{H1,r_4}+\rho D_{H2,r_4} \\ < 0 & > 0 \\ -(D_{H4,Y} & D_{H4,r_4}+(1-\rho)D_{H2,r_4} \\ +(1-\rho)D_{H2,Y}) & -S_{U4,r_4} \end{vmatrix} > 0$$

(Die Determinante in (193) ist vom Typ 1.)

und damit:

(194)

$$\frac{d(Y_{S_1})}{dt} = \frac{-(\sum_{i=1,2,4} D_{Hi,r_4} - S_{U4,r_4})\frac{d|J_{III}|}{dt}}{|J_{III}|^2} < 0 \quad \text{bzw.}$$

(195)

$$\frac{d(Y_Y)}{dt} = \frac{(D_{H1,r_4} + \rho D_{H2,r_4})\frac{d|J_{III}|}{dt}}{|J_{III}|^2} \gtreqless 0 \quad .$$

Schließlich läßt sich bestätigen, daß:

(196)

$$\frac{d(Y_{S_1})}{d\rho} = \frac{-(\sum_{i=1,2,4} D_{Hi,r_4} - S_{U4,r_4})\frac{d|J_{III}|}{d\rho}}{|J_{III}|^2} < 0 \quad \text{mit}$$

$$\frac{d|J_{III}|}{d\rho} = (1-t)D_{H2,Y}(\sum_{i=1,2,4} D_{Hi,r_4} - S_{U4,r_4}) - D_{H2,r_4} \cdot$$

$$\cdot \sum_{i=1,2,4} D_{Hi,Y} + t \cdot D_{H2,r_4}(\sum_{i=1,2,4} D_{Hi,Y} - 1) > 0$$

und

(197)

$$\frac{d(Y_\gamma)}{d\rho} = \frac{1}{|J_{III}|^2}\Big[(1-t)\Big(\sum_{i=1,2,4} D_{Hi,r_4} - S_{U4,r_4}\Big)\cdot$$

$$\cdot\left(D_{H1,r_4}\cdot D_{H2,Y} - D_{H1,Y}\cdot D_{H2,r_4}\right) - t\cdot D_{H2,r_4}\cdot$$

$$\cdot\Big(\sum_{i=1,2,4} D_{Hi,r_4} - S_{U4,r_4} - D_{H1,r_4}\cdot\sum_{i=1,2,4} D_{Hi,Y}\Big)\Big] \gtreqless 0$$

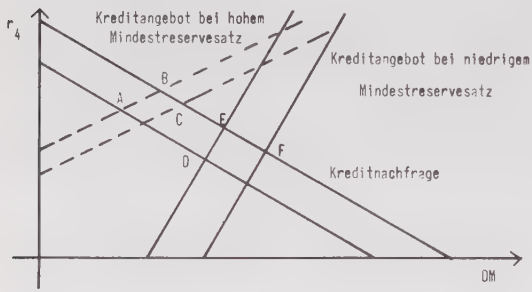
Die Erhöhung des marginalen Steuersatzes t hat also auch hier bei Änderungen von γ eine stabilisierende Wirkung auf das Volkseinkommen (im komparativ statischen Sinne); die geldpolitische Effizienz wird allerdings genau so verringert wie bei einer Erhöhung von ρ. Zusätzlich erkennt man aus (197), daß auch unter der Voraussetzung (185) eine Erhöhung von ρ bei $t>0$ nicht stabilisierend wirken muß.

Woran liegt es, daß die stabilisierende Wirkung eines hohen marginalen Steuersatzes eindeutig ist, die eines hohen (marginalen) Mindestreservesatzes jedoch nicht? Die Antwort hierauf - und damit zugleich eine Interpretation für das angeführte Ergebnis - läßt sich an Hand einer graphischen Darstellung für den Bondsmarkt finden.

Wir gehen von einem bestimmten Zins $r_4 = r_4^o$ aus und nehmen an, daß die Haushalte und nichtfinanziellen Unternehmungen planen, ihre Sichteinlagen bei Banken um ΔD_{H2} zugunsten einer erhöhten Bondsnachfrage zu verringern, wenn ceteris paribus statt r_4^o ein Zins $r_4^o + \Delta r_4$ ($\Delta r_4 > 0$) geboten wird. Bei einer solchen Substitution verringert sich die Bondsnachfrage der Banken - und zwar um $(1-\rho)\Delta D_{H2}$, wenn wir die Mindestreserveverpflichtungen beachten. Der Zinsänderung für Bonds um Δr_4 entspricht damit insgesamt ein um $\Delta D_{H2} - (1-\rho)\Delta D_{H2}$ erhöhtes Kreditangebot an nichtfinanzielle Unternehmungen (= Bondsnachfrage).[1)]

1) Vgl. auch die Argumentation A. Benavies [11], S.446 ff.

Offensichtlich ist die Angebotsänderung bei hohem Mindestreservesatz ρ größer als bei niedrigem, was bedeutet, daß die Angebotskurve für Kredite an nichtfinanzielle Unternehmungen im ersten Fall flacher verläuft als im zweiten (man kann dies als die Substitutionswirkung von Mindestreserven bezeichnen). - Wenn man lineare Verläufe voraussetzt, entsprechen den unterschiedlichen Angebotskurven in Figur 17 die durch A und D verlaufenden und nach rechts ansteigenden Geraden.



Figur 17

Betrachten wir die Konsequenz einer Verschiebung der Kreditnachfragekurve nach rechts (Erhöhung von γ), so bedeutet dies partialanalytisch zunächst folgendes: Die Änderung der Gleichgewichtsmenge ist bei hohem Mindestreservesatz größer als bei niedrigem (vgl. die Punkte B und E in Figur 17). Die Erhöhung der Kredite an Unternehmungen (und damit die des Volkseinkommens)[1] ist jedoch - wenn wir das Gesamtmodell betrachten - wegen (164) mit einer Rechtsverschiebung der jeweiligen Kreditangebotskurven verbunden. Wichtig ist, daß die Verschiebung bei

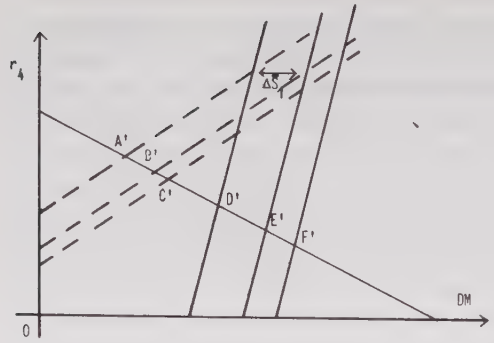
1) Die zusätzlichen Kredite führen zu erhöhten Investitionen und beeinflussen hierdurch das Volkseinkommen.

hohen Mindestreserven geringer ist als bei niedrigen (man kann dies als die Einkommenswirkung von Mindestreserven bezeichnen), da von den bei Banken zusätzlich gehaltenen Einlagen nur ein Teil $(1-\rho)$ für erhöhte Bondsnachfrage verwendet werden kann.

In Figur 17 ergeben sich die neuen Gleichgewichtspunkte C bzw. F. Ob die Differenz der Abszissenwerte von C und A größer ist als die von F und D, läßt sich allgemein nicht sagen. Ob daher eine gegebene Änderung $\Delta\gamma$ in einem System hoher oder in einem System niedriger Mindestreserven zu einer größeren Änderung der Gleichgewichtskreditmenge (und damit des Volkseinkommens) führt, ist ohne weitere Angaben unbestimmt. Es erscheint also durchaus plausibel, wenn oben über die stabilisierende Wirkung einer Erhöhung von ρ nichts Eindeutiges gesagt werden konnte. Es gibt eben sowohl die Substitutions- als auch die Einkommenswirkung von Mindestreserven - wobei die erste eine tendenziell destabilisierende, die zweite eine tendenziell stabilisierende Komponente der Gesamtwirkung darstellt.

Vernachlässigen wir einmal die Substitutionswirkung - so läßt sich dies in Version II bzw. III durch $D_{H2,r_4} = 0$ ausdrücken. In der Tat erkennt man aus (184) und (197), daß die Erhöhung der Mindestreserven dann als eindeutig stabilisierend angesehen werden muß.

Die Darstellung der Figur 17 ist im übrigen auch geeignet, die geringe Effizienz der Offenmarktpolitik in einem System hoher Mindestreserven zu demonstrieren. Gehen wir in Figur 18 von den Punkten A' bzw. D' aus und betrachten die Konsequenzen einer Erhöhung der Zentralbankgeldmenge $\overline{S}_1$ um $\Delta\overline{S}_1$, was einer Verschiebung der jeweiligen Kreditangebotskurve um den Betrag $\Delta\overline{S}_1$ gleichkommt.



Figur 18

Die bei partialanalytischer Betrachtung festzustellende Auswirkung auf die Gleichgewichtskreditmenge ist - wie man sich geometrisch leicht klar machen kann - im System mit hohen Mindestreserven (siehe Punkt B') geringer als im System mit niedrigen Mindestreserven (siehe Punkt E'). Hinzu kommt, daß auch die Rückwirkungen über das Volkseinkommen im System hoher Mindestreserven zu einer geringeren zusätzlichen Rechtsverschiebung der Kreditangebotskurve führt als im System niedriger Mindestreserven (siehe die Punkte C' bzw. F'). Die Gesamtwirkung einer Änderung der Zentralbankgeldmenge auf die Höhe des Gleichgewichtskredits an Unternehmungen ist also im ersten Fall eindeutig geringer als im zweiten - hohe Mindestreserven bewirken, daß die Offenmarktpolitik ineffizienter wird.

Wir haben gesehen, daß die differenzierte Beurteilung der Mindestreserven deshalb erforderlich wird, weil neben der Einkommenswirkung eine Substitutionswirkung zu beobachten ist. In der Regel wird diese in allen Überlegungen vernachlässigt, in denen Preise explizit keine Rolle spielen, wie

etwa in den üblichen Modellen zur Geldschöpfungstheorie[1]. Bereits bei der Behandlung des Ansatzes von P.F. Smith wurde die Nichtberücksichtigung der Preise als Hauptnachteil angeführt. Es zeigt sich hiermit, daß dieser Nachteil nicht nur von theoretischem Interesse ist, sondern daß er auch bei der Beurteilung wirtschaftspolitischer Instrumente - wie den Mindestreserven - ins Gewicht fällt.

Bisher wurde die stabilisierende Wirkung von Mindestreserven unter der Annahme diskutiert, daß die Kreditnachfrage der Unternehmungen (und damit die Investition) in bestimmter Weise geändert wird.

Da im Rahmen der Geldschöpfungstheorie auch die Bargeldhaltung eine wesentliche Rolle spielt, soll nun überprüft werden, welche Konsequenzen bei Änderungen dieser Größe eine Erhöhung des Mindestreservesatzes hat.

In die Nachfragefunktionen D_{H1} und D_{H2} führen wir hierzu einen Parameter β ein[2]. Geht man im übrigen von Version II aus, so folgt:

Version IV:

$$(198) \quad -\beta+D_{H1}(Y,r_4)+\rho(D_{H2}(Y,r_4)+\beta) = \overline{S}_1$$

$$(199) \quad D_{H4}(Y,r_4)+(1-\rho)(D_{H2}(Y,r_4)+\beta)+\overline{S}_1 = S_{U4}(r_4)+\gamma$$

Eine Erhöhung von β bedeutet, daß von Haushalten und nichtfinanziellen Unternehmungen geplant wird, weniger Bargeld und in gleicher Höhe mehr Sichteinlagen bei Banken zu halten.

---

1) Vgl. Die Literaturangaben in Fußnote 4 auf S. 5.

2) Zur Begründung dafür, daß β in zwei Funktionen berücksichtigt wird, vgl. W.C. Brainard and J. Tobin [17], S. 1o3.

Die Differentiation von (198) und (199) nach β führt zu

(2oo)

$$\begin{bmatrix} \overset{>0}{D_{H1,Y}}+\rho D_{H2,Y} & \overset{\lesseqgtr 0}{D_{H1,r_4}}+\rho D_{H2,r_4} \\ \overset{>0}{D_{H4,Y}}+(1-\rho)D_{H2,Y} & \overset{>0}{D_{H4,r_4}}+(1-\rho)D_{H2,r_4}-S_{U4,r_4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_\beta \\ r_{4,\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\rho \\ \rho-1 \end{bmatrix}$$

bzw.

(2o1)

$$\begin{bmatrix} \overset{>0}{D_{H1,Y}}+\rho D_{H2,Y} & \overset{\lesseqgtr 0}{D_{H1,r_4}}+\rho D_{H2,r_4} \\ \overset{>0}{\sum_{i=1,2,4} D_{Hi,Y}} & \overset{>0}{\sum_{i=1,2,4} D_{Hi,r_4}}-S_{U4,r_4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_\beta \\ r_{4,\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\rho \\ 0 \end{bmatrix}$$

so daß gilt:

$$(2o2) \qquad Y_\beta = \frac{(1-\rho)\left(\sum_{i=1,2,4} D_{Hi,r_4}-S_{U4,r_4}\right)}{|J_{IV}|} > 0$$

mit

$$|J_{IV}| = (D_{H1,Y}+\rho D_{H2,Y})\left(\sum_{i=1,2,4} D_{Hi,r_4}-S_{U4,r_4}\right) - (D_{H1,r_4}+\rho D_{H2,r_4})\cdot \sum_{i=1,2,4} D_{Hi,Y} > 0$$

und

$$(2o3) \qquad r_{4,\beta} = \frac{-(1-\rho)\cdot \sum D_{Hi,Y}}{|J_{IV}|} < 0 \quad .$$

Schließlich folgt aus (2o2):

(204)

$$\frac{d(Y_\beta)}{d\rho} = \frac{-\left(\sum_{i=1,2,4} D_{Hi,r_4} - S_{U4,r_4}\right)}{|J_{IV}|^2} \cdot \Big[|J_{IV}| + (1-\rho)\left(D_{H2,Y}\left(\sum_{i=1,2,4} D_{Hi,r_4} - S_{U4,r_4}\right) - D_{H2,r_4} \cdot \sum_{i=1,2,4} D_{Hi,Y}\right)\Big] < 0 \quad .$$

Bei Änderungen der Bargeldhaltung wirkt eine Erhöhung des Mindestreservesatzes eindeutig stabilisierend im komparativ statischen Sinn, was sich wiederum leicht mit Hilfe einer zu Figur 17 bzw. 18 analogen Darstellung veranschaulichen läßt. Darauf soll jedoch nicht weiter eingegangen werden.

Um die stabilisierende Wirkung eines hohen Mindestreservesatzes beurteilen zu können, ist es keineswegs gleichgültig, an welche Störungen gedacht wird - an solche der Bargeldhaltung oder an solche der Kreditnachfrage von Unternehmungen ($\Delta\beta$ bzw. $\Delta\gamma$). Ebenso wenig, wie es für die Auswirkungen einer bestimmten Störung gleichgültig ist, ob der Steuersatz t oder der Mindestreservesatz ρ erhöht wird[1].

Selbst in den Fällen, in denen die Erhöhung der Mindestreserven destabilisierend wirkt, kann nicht zwingend der Schluß gezogen werden, sie seien ein überflüssiges Instrument der Geldpolitik. Ihre Beurteilung muß sich bereits ändern, wenn wir die bislang skizzierten deterministischen Ansätze verlassen und eine Welt betrachten, in der die Wirkung einer bestimmten wirtschaftspolitischen Entscheidung nicht mit Sicherheit angegeben werden kann. Hier wird folgender Gedanke Brainards[2] wichtig:
Wenn das Ergebnis einer jeden Maßnahme nicht gewiß ist, läßt sich analog zu einem optimalen Portefeuille

---

1) Vgl. oben Version II und III.

2) W.C. Brainard [16] , S. 418 ff.

aus Wertpapieren ein optimales Bündel solcher Maßnahmen denken. Sind zufallsverteilte Reaktionsparameter für die Wirkung der Instrumentvariablen von Bedeutung, so ist es sinnvoll, wenn der entscheidende Politiker die Streuung der Zielvariablen um einen angestrebten Wert zu minimieren sucht[1]. Dies kann - worauf Brainard hinweist[2] - durchaus implizieren, daß ein Instrument in der "verkehrten" Richtung eingesetzt wird - daß also im konkreten Fall ein bestimmter Mindestreservesatz vorgeschrieben bzw. ein vorhandener erhöht wird[3].

Im übrigen könnte man einwenden, daß die (de-)stabilisierende Wirkung von Mindestreserven unter Umständen bereits dann anders beurteilt werden muß, wenn die Nonmonetary Financial Intermediaries (NFI) explizit berücksichtigt werden. - Wir wollen im nächsten Abschnitt zeigen, daß dies nicht der Fall ist. Hierbei wird ein Ansatz benutzt, mit dessen Hilfe sich auch die Frage untersuchen läßt, ob das Anwachsen der NFI zu einer geringeren Effizienz der Geldpolitik führt.

11. Der Einfluß der Nonmonetary Financial Intermediaries auf die Wirksamkeit der Offenmarktpolitik

Wir gehen von Version II aus und nehmen zusätzlich an, daß Haushalte und Kreditbanken nunmehr auch Einlagen bei den NFI nachfragen können, deren Zins r_3 sich frei bildet. Die NFI fragen ihrerseits Zentralbankgeld, Sichteinlagen bei Kreditbanken und Bonds nach, wobei die für sie relevanten Funktionen den

---

1) W.C. Brainard [16], S. 413 und 418.

2) ebenda, S. 421.

3) Wenn eine Erhöhung des Mindestreservesatzes destabilisierend wirkt, bedeutet der Einsatz des Instruments "Änderung des Mindestreservesatzes" in der "richtigen" Richtung, daß der Mindestreservesatz erniedrigt bzw. Mindestreserven überhaupt abgeschafft werden.

Suffix F erhalten. Die Summe der den Kreditbanken angebotenen Sichteinlagen wird mit D_2 bezeichnet und in die einzelnen Nachfragefunktionen der Kreditbanken als Argument eingeführt.

Wir erhalten damit die Version V, wobei die zweite Gleichung (2o6) eine reine Definitionsgleichung ist, während durch (2o5), (2o7) und (2o8) die Gleichgewichtsbedingungen auf den Märkten für Zentralbankgeld, Einlagen bei NFI, bzw. Bonds angegeben werden.

Version V:

(2o5) $D_{H1}(Y,r_3,r_4)+D_{B1}(r_3,r_4,D_2)+D_{F1}(r_3,r_4) = \overline{S}_1$

(2o6) $D_{H2}(Y,r_3,r_4)+ D_{F2}(r_3,r_4) = D_2$

(2o7) $D_{H3}(Y,r_3,r_4)+D_{B3}(r_3,r_4,D_2) = S_{F3}(r_3,r_4)$

(2o8) $D_{H4}(Y,r_3,r_4)+D_{B4}(r_3,r_4,D_2)+D_{F4}(r_3,r_4)+\overline{S}_1 = S_{U4}(r_4)+\gamma$

Untersucht man auch hier die Auswirkungen einer Änderung von $\overline{S}_1$ bzw. γ, so führt die Differentiation des gesamten Systems zu

(2o9)

$$
\begin{bmatrix}
>0 & >0 & \lessgtr 0 & \lessgtr 0 \\
D_{H1,Y} & D_{B1,D_2}-? & D_{H1,r_3}+D_{B1,r_3}+D_{F1,r_3} & D_{H1,r_4}+D_{B1,r_4}+D_{F1,r_4} \\
>0 & <0 & \lessgtr 0 & \lessgtr 0 \\
D_{H2,Y} & -1 & D_{H2,r_3}+D_{F2,r_3} & D_{H2,r_4}+D_{F2,r_4} \\
>0 & >0 & >0 & \lessgtr 0 \\
D_{H3,Y} & D_{B3,D_2} & D_{H3,r_3}+D_{B3,r_3}-S_{F3,r_3} & D_{H3,r_4}+D_{B3,r_4}-S_{F3,r_4} \\
>0 & >0 & \lessgtr 0 & >0 \\
D_{H4,Y} & D_{B4,D_2} & D_{H4,r_3}+D_{B4,r_3}+D_{F4,r_3} & D_{H4,r_4}+D_{B4,r_4}+D_{F4,r_4}-S_{U4,r_4}
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix} Y_x \\ D_{2,x} \\ r_{3,x} \\ r_{4,x} \end{bmatrix}
=
\begin{matrix} x=\overline{S}_1 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \end{matrix}
\quad \text{bzw.} \quad
\begin{matrix} x=\gamma \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{matrix}
$$

Die in (2o9) bereits aufgeführten Vorzeichen ergeben sich, wenn man die Verhaltensannahmen (164) und (175) durch die folgenden ergänzt oder modifiziert:

$$
\begin{aligned}
(21o)\quad & D_{H3,Y}>0;\ D_{H3,r_3}>0;\ D_{B3,r_3}>0;\ S_{F3,r_3}<0; \\
& D_{H3,r_4}\lesseqgtr 0;\ D_{B3,r_4}\lesseqgtr 0;\ S_{F3,r_4}\gtreqless 0;\ D_{Bi,D_2}>0 \quad (i=1,3,4) \\
& D_{Hi,r_3}\lesseqgtr 0;\ D_{Bi,r_3}\lesseqgtr 0;\ D_{Fi,r_3}\lesseqgtr 0 \quad (i=1,2,4) \\
& \sum_{i=1}^{4} D_{Hi,r_j}>0 \quad (j=3,4)
\end{aligned}
$$

Für die Kreditbanken und NFI gilt auf Grund der Bilanzrestriktionen:

$$
\begin{aligned}
(211)\quad & D_{B1,D_2}+D_{B3,D_2}+D_{B4,D_2}-1 = 0 \\
& D_{B1,r_3}+D_{B3,r_3}+D_{B4,r_3} = 0 \\
& D_{F1,r_3}+D_{F2,r_3}+D_{F4,r_3}-S_{F3,r_3} = 0 \\
& D_{F1,r_4}+D_{F2,r_4}+D_{F4,r_4}-S_{F3,r_4} = 0
\end{aligned}
$$

Man erkennt unter diesen Bedingungen, daß die Koeffizientendeterminante $|J_V|$ des Gleichungssystems (2o9) nach Multiplikation der beiden ersten Spalten mit -1 die Form des Typs 2[1] hat, so daß gilt:

$$(212)\quad |J_V| < 0 \quad .$$

Lösen wir (2o9) mit Hilfe der Cramerschen Regel nach $Y_{\overline{S}_1}$ und addieren in der Zählerdeterminante die erste Zeile zur letzten, so folgt:
Die erste Spalte der Zählerdeterminante enthält nur ein einziges von Null verschiedenes Element und zwar die Zahl 1 in der ersten Zeile. Der hierzu gehörende Kofaktor hat die Form des Typs 1, wenn man seine erste Spalte mit -1 multipliziert. Zusammen mit (212) bedeutet das:

$$(213)\quad Y_{\overline{S}_1} > 0 \quad .$$

---

1) Vgl. Anhang IV.

In entsprechender Weise läßt sich zeigen:

(214) $D_{2,\overline{S}_1} > 0$

(215) $r_{3,\overline{S}_1} < 0$

(216) $r_{4,\overline{S}_1} < 0$

(217) $Y_Y > 0$

(218) $r_{4,Y} > 0$.

Das Vorzeichen von $D_{2,Y}$ und $r_{3,Y}$ hingegen ist ohne zusätzliche Angaben unbestimmt.

Man kann nun wiederum fragen, wie sich die einzelnen Multiplikatoren ändern, wenn $\rho = D_{B1,D_2}$ erhöht wird, wobei eine solche Erhöhung zu Lasten von D_{B3} und D_{B4} gehen muß.

Da die Differentiation nach ρ recht umständlich ist, wird folgende von Tobin und Brainard[1] benutzte Technik auch hier angewandt:
Die aus (209) für den Mindestreservesatz ρ zu ermittelnden Lösungen (= Multiplikatoren) werden auch für $\rho+\Delta\rho$ angegeben. Man erhält sie aus (209), wenn wir die zweite Spalte dieses Gleichungssystems durch

$$\begin{bmatrix} \rho+\Delta\rho \\ -1 \\ D_{B3,D_2}-\alpha\Delta\rho \\ D_{B4,D_2}-(1-\alpha)\Delta\rho \end{bmatrix} \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

ersetzen, da die erhöhten Mindestreserven nur dann gehalten werden können, wenn die Kreditbanken ihre Bondshaltung und ihre Einlagen bei den NFI im insgesamt gleichen Umfang verringern.
Zur Kennzeichnung wird der Lösungsvektor mit dem Suffix ρ bzw. $\rho+\Delta\rho$ versehen.

---

1) Vgl. J. Tobin and W.C. Brainard [110] , S. 77 ff.

Annahme 1: $x = \overline{S}_1$

Wenn wir die Gleichungen des Systems (2o9) für die Mindestreservesätze ρ und ρ+Δρ voneinander subtrahieren, ergibt sich:

(219)

$$\begin{bmatrix} \\ J_V \\ \\ \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} Y_{\overline{S}_1} \\ D_{2,\overline{S}_1} \\ r_{3,\overline{S}_1} \\ r_{4,\overline{S}_1} \end{bmatrix}_{\rho+\Delta\rho} - \begin{bmatrix} Y_{\overline{S}_1} \\ D_{2,\overline{S}_1} \\ r_{3,\overline{S}_1} \\ r_{4,\overline{S}_1} \end{bmatrix}_{\rho} \right) = \left(D_{2,\overline{S}_1}\right)_{\rho+\Delta\rho} \begin{bmatrix} -\Delta\rho \\ 0 \\ \alpha\Delta\rho \\ (1-\alpha)\Delta\rho \end{bmatrix}$$

Hieraus folgt nach der Cramer'schen Regel:

(22o)
$$\left(Y_{\overline{S}_1}\right)_{\rho+\Delta\rho} - \left(Y_{\overline{S}_1}\right)_{\rho} = \left(D_{2,\overline{S}_1}\right)_{\rho\ \Delta\rho} \cdot$$

$$\frac{\begin{vmatrix} -\Delta\rho & D_{B1,D_2} & \cdot & D_{H1,r_4}+D_{B1,r_4}+D_{F1,r_4} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha\Delta\rho & \cdot & \cdot & \cdot \\ (1-\alpha)\Delta\rho & D_{B4,D_2} & \cdot & D_{H4,r_4}+D_{B4,r_4}+D_{F4,r_4}-S_{u4,r_4} \end{vmatrix}}{|J_V|}$$

Wir addieren in der Zählerdeterminante des rechts stehenden Ausdrucks das α-fache der ersten Zeile zur dritten und das (1-α)-fache der ersten Zeile zur vierten. Damit ist nur noch ein Element der ersten Spalte dieser Determinante von Null verschieden. Man kann leicht bestätigen, daß der zugehörige Kofaktor die Form des Typs 1 hat, wenn man seine erste Spalte mit -1 multipliziert. Bezeichnen wir die aus $[J_V]$ durch die genannten Elementaroperationen hervorgegangene Matrix mit $[J_V]^*$ und den zum Element in der i-ten Zeile und j-ten Spalte von $[J_V]^*$ gehörenden Kofaktor mit K_{ij}, so gilt daher:

(221) $K_{11} < 0$

und folglich zusammen mit (213), (214) und (22o)

$$\left(Y_{\overline{S}_1}\right)_{\rho+\Delta\rho} - \left(Y_{\overline{S}_1}\right)_{\rho} = \left(D_2,_{\overline{S}_1}\right)_{\rho+\Delta\rho} \frac{-\Delta\rho \cdot K_{11}}{|J_V|} \text{ , d.h.}$$

$$(222)\quad \operatorname{sign}\left[\left(Y_{\overline{S}_1}\right)_{\rho+\Delta\rho} - \left(Y_{\overline{S}_1}\right)_{\rho}\right] \quad (+)\ \frac{(-)\operatorname{sign}(\Delta\rho)(-)}{(-)}$$

Dies bedeutet, daß bei einer Erhöhung des Mindestreservesatzes von ρ auf $\rho+\Delta\rho$ ($\Delta\rho>0$) die Offenmarktpolitik ineffizienter wird. An dem bereits auf S. 132 festgestellten Ergebnis hat sich also durch das Auftreten der NFI nichts geändert.

Die Wirkung einer Änderung des Mindestreservesatzes um $\Delta\rho$ auf die Größen D_2, r_3 und r_4 läßt sich in entsprechender Weise ermitteln. Da die Kofaktoren K_{1j} ($j=2,3,4$) durch geeignete Spaltenmultiplikation mit -1 und Zeilenumstellungen auf die Form des Typs 2 zurückgeführt werden können, läßt sich zunächst leicht zeigen, daß

(223) $K_{12} < 0$; $K_{13} > 0$ und $K_{14} > 0$.

Aus (219) folgt damit bei $\Delta\rho>0$ analog zu oben:

$$\left(D_2,_{\overline{S}_1}\right)_{\rho+\Delta\rho} - \left(D_2,_{\overline{S}_1}\right)_{\rho} = \left(D_2,_{\overline{S}_1}\right)_{\rho+\Delta\rho} \cdot \frac{-\Delta\rho \cdot K_{12}}{|J_V|} \text{ , d.h.}$$

$$(224)\ \operatorname{sign}\left[\left(D_2,_{\overline{S}_1}\right)_{\rho+\Delta\rho} - \left(D_2,_{\overline{S}_1}\right)_{\rho}\right] = (+)\ \frac{(-)\cdot(-)}{(-)} = (-)$$

und

$$\left(r_3,_{\overline{S}_1}\right)_{\rho+\Delta\rho} - \left(r_3,_{\overline{S}_1}\right)_{\rho} = \left(D_2,_{\overline{S}_1}\right)_{\rho+\Delta\rho} \cdot \frac{-\Delta\rho K_{13}}{|J_V|} \text{ , d.h.}$$

$$(225)\ \operatorname{sign}\left[\left(r_3,_{\overline{S}_1}\right)_{\rho+\Delta\rho} - \left(r_3,_{\overline{S}_1}\right)_{\rho}\right] = (+)\ \frac{(-)\cdot(+)}{(-)} = (+)$$

und

$$\left(r_4,\overline{S}_1\right)_{\rho+\Delta\rho}-\left(r_4,\overline{S}_1\right)_{\rho}=\left(D_2,\overline{S}_1\right)_{\rho+\Delta\rho}\frac{-\Delta\rho\cdot K_{14}}{|J_V|}\text{, d.h.}$$

$$(226)\quad \operatorname{sign}\left[\left(r_4,\overline{S}_1\right)_{\rho+\Delta\rho}-\left(r_4,\overline{S}_1\right)_{\rho}\right]=(+)\,\frac{(-)\cdot(+)}{(-)}=(+)$$

Die auf eine bestimmte Offenmarktoperation der Zentralbank zurückzuführende Änderung der Einlagen bei Kreditbanken bzw. der Zinssätze r_3 und r_4 ist also bei hohem Mindestreservesatz geringer als bei niedrigem[1].

Annahme 2: $x = \gamma$

In diesem Fall tritt an die Stelle von (219) das folgende Gleichungssystem:

(227)

$$\left[J_V\right]\left(\begin{bmatrix}Y_\gamma\\ D_{2,\gamma}\\ r_{3,\gamma}\\ r_{4,\gamma}\end{bmatrix}_{\rho+\Delta\rho}-\begin{bmatrix}Y_\gamma\\ D_{2,\gamma}\\ r_{3,\gamma}\\ r_{4,\gamma}\end{bmatrix}_{\rho}\right)=\left(D_{2,\gamma}\right)_{\rho+\Delta\rho}\cdot\begin{bmatrix}-\Delta\\ 0\\ \alpha\Delta\rho\\ (1-\alpha)\Delta\rho\end{bmatrix}$$

Die weiteren Überlegungen entsprechen völlig denen, die unter der Annahme $x = \overline{S}_1$ gemacht wurden. Es folgt daher bei $\Delta\rho>0$:

$$(228)\quad \operatorname{sign}\left[\left(Y_\gamma\right)_{\rho+\Delta\rho}-\left(Y_\gamma\right)_{\rho}\right]=\operatorname{sign}\left[\left(D_{2,\gamma}\right)_{\rho+\Delta\rho}\right]\cdot\frac{(-)\cdot(-)}{(-)}$$

$$(229)\quad \operatorname{sign}\left[\left(D_{2,\gamma}\right)_{\rho+\Delta\rho}-\left(D_{2,\gamma}\right)_{\rho}\right]=\operatorname{sign}\left[\left(D_{2,\gamma}\right)_{\rho+\Delta\rho}\right]\cdot\frac{(-)\cdot(-)}{(-)}$$

$$(230)\quad \operatorname{sign}\left[\left(r_{3,\gamma}\right)_{\rho+\Delta\rho}-\left(r_{3,\gamma}\right)_{\rho}\right]=\operatorname{sign}\left[\left(D_{2,\gamma}\right)_{\rho+\Delta\rho}\right]\cdot\frac{(-)\cdot(+)}{(-)}$$

$$(231)\quad \operatorname{sign}\left[\left(r_{4,\gamma}\right)_{\rho+\Delta\rho}-\left(r_{4,\gamma}\right)_{\rho}\right]=\operatorname{sign}\left[\left(D_{2,\gamma}\right)_{\rho+\Delta\rho}\right]\cdot\frac{(-)\cdot(+)}{(-)}$$

---

1) Man beachte hierzu (215) und (216).

Auf Grund der Erläuterungen von S. 145 wissen wir, daß das Vorzeichen von $D_{2,\gamma}$ im allgemeinen nicht eindeutig ist. Somit lassen sich keine uneingeschränkten Angaben darüber machen, wie eine Erhöhung des Mindestreservesatzes auf Y_γ, $D_{2,\gamma}$, $r_{3,\gamma}$ und $r_{4,\gamma}$ wirkt. Wegen (228) - (231) gelten allerdings in Verbindung mit (217) und (218) folgende Aussagen:[1)]

a. Eine Erhöhung von ρ führt genau dann zu einer Verringerung von Y_γ (absoluten Verringerung von $r_{4,\gamma}$), wenn jede Änderung von γ eine gleichgerichtete Änderung der geplanten Einlagen bei Banken bewirkt (wenn also $D_{2,\gamma}>0$).
b. Eine Erhöhung von ρ führt genau dann zu einer Verringerung des absoluten Betrages von $D_{2,\gamma}$, wenn jede Änderung von γ eine Änderung der geplanten Einlagen bei Banken bewirkt (wenn also $D_{2,\gamma}\neq 0$).

Über die Wirkung einer Erhöhung des Mindestreservesatzes auf $r_{3,\gamma}$ läßt sich nichts sagen, da sowohl das Vorzeichen von $D_{2,\gamma}$ wie dasjenige von $r_{3,\gamma}$ ohne weitere Angaben unbekannt ist, und da von sign $D_{2,\gamma}$ im allgemeinen nicht auf sign $r_{3,\gamma}$ geschlossen werden kann.

Ein Vergleich mit Version II zeigt, daß die Einführung der NFI nicht die R i c h t u n g beeinflußt hat, in der die Änderung bestimmter Parameter (z.B. $\overline{S}_1$, γ und ρ) wirkt.

Damit ist noch nicht erörtert worden, ob das A n w a c h s e n der NFI den Einfluß der Geldpolitik abschwächt, wie dies in der Literatur[2)] seit den Arbeiten von Gurley und Shaw[3)] überwiegend angenommen wird.

---

1) Das Vorzeichen von $D_{2,\gamma}$ ist zwar im allgemeinen unbestimmt (vgl. S. 145 oben), doch ist es von der Höhe des Mindestreservesatzes ρ unabhängig.
2) Vgl. S. 125, Fußnote 5.
3) J.G. Gurley and E.S. Shaw [36] ,[37].

Wir werden hierauf an Hand von Version V nur kurz eingehen. Da das Anwachsen der NFI in einem komparativ statischen Modell verschieden interpretiert werden kann, sollen drei Fälle - neben denen sich viele weitere denken lassen - betrachtet werden.

a. Die von Haushalten und nichtfinanziellen Unternehmungen nachgefragten Einlagen bei Kreditbanken (bzw. NFI) erniedrigen (bzw. erhöhen) sich um den konstanten Betrag ε. Kurz: Fall 1. unterscheidet sich von Version V nur dadurch, daß ε auf der linken Seite von (2o6) subtrahiert und auf der linken Seite von (2o7) addiert wird.

b. Bei Haushalten und nichtfinanziellen Unternehmungen verringert (bzw. erhöht) sich die Neigung zum Halten von Zentralbankgeld (bzw. Bonds, Einlagen bei Kreditbanken und Einlagen bei NFI) in Abhängigkeit vom Volkseinkommen. Die Zunahme sei für die Einlagen bei NFI am größten. Kurz: an die Stelle der ersten Spalte von (2o9) tritt:

(232)

$$\begin{bmatrix} D_{H1,Y}-\varepsilon \\ D_{H2,Y}+\alpha_2\varepsilon \\ D_{H3,Y}+\alpha_3\varepsilon \\ D_{H4,Y}+\alpha_4\varepsilon \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} 1 \leq \alpha_1 \leq 1 \quad (i=2,3,4) \\ \sum_{i=2}^{4} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_3 > \text{Max}\ \{\alpha_2, \alpha_4\} \\ 0 < \varepsilon < D_{H1,Y} \end{array}$$

c. Bei Haushalten und nichtfinanziellen Unternehmungen verringert (bzw. erhöht) sich die Neigung zum Halten von Einlagen bei Kreditbanken (bzw. Einlagen bei NFI) in Abhängigkeit vom Volkseinkommen. Kurz: an die Stelle der ersten Spalte von (2o9) tritt:

$$(233)\qquad \begin{bmatrix} D_{H1,Y} \\ D_{H2,Y}{}^{-\varepsilon} \\ D_{H3,Y}{}^{+\varepsilon} \\ D_{H4,Y} \end{bmatrix} \qquad 0 < \varepsilon < D_{H2,Y}$$

Zu a.: Es ist unmittelbar klar, daß eine solche Änderung keinerlei Einfluß auf die jeweiligen Multiplikatoren und damit auf die Effizienz der Geldpolitik hat.
Zu b.: Wir versehen den Ausdruck $Y_{\overline{S}_1}$ in dem durch (232) modifizierten System (2o9) mit dem Suffix mod.b . Subtrahieren wir (2o9) von dem durch (232) modifizierten System (2o9) und gehen im übrigen analog wie auf S. 146 vor, so ergibt sich mit der angeführten Bezeichnung:

$$(234)\qquad \left(Y_{\overline{S}_1}\right)_{mod.b} - \left(Y_{\overline{S}_1}\right) = \left(Y_{\overline{S}_1}\right)_{mod.b} \cdot$$

$$\frac{\begin{vmatrix} \varepsilon & D_{B1,D_2} & \cdot & D_{H1,r_4}{}^{+D_{B1,r_4}{}^{+D_{F1,r_4}}} \\ -\alpha_2\varepsilon & -1 & \cdot & \cdot \\ -\alpha_3\varepsilon & D_{B3,D_2} & \cdot & \cdot \\ -\alpha_4\varepsilon & D_{B4,D_2} & \cdot & D_{H4,r_4}{}^{+D_{B4,r_4}{}^{+D_{F4,r_4}}-S_{U4,r_4}} \end{vmatrix}}{|J_V|}$$

Nach Addition des α_1-fachen der ersten Zeile zur i-ten Zeile (i=2,3,4) enthält die rechts stehende Zählerdeterminante nur noch ein Element in der ersten Spalte, das ungleich Null ist. Der zugehörige Kofaktor läßt sich durch Multiplikation seiner ersten Spalte mit -1 in den Typ 1 überführen - er ist also negativ.
Zusammen mit (212) und (213) folgt daher aus (234)

$$(235) \quad \operatorname{sign}\left[\left(Y_{\overline{S}_1}\right)_{\text{mod.b}} - \left(Y_{\overline{S}_1}\right)\right] = (+)$$

Bei der in (232) zum Ausdruck kommenden Interpretation hat das Anwachsen der NFI also zur Folge, daß die Offenmarktpolitik effizienter wird.

Zu c.: Zur Unterscheidung versehen wir den Ausdruck $Y_{\overline{S}_1}$ in dem durch (233) modifizierten System (2o9) mit dem Suffix mod.c und subtrahieren die Gleichungen (2o9) von dem durch (233) modifizierten System (2o9). Dies führt zu

$$(236) \quad \left(Y_{\overline{S}_1}\right)_{\text{mod.c}} - \left(Y_{\overline{S}_1}\right) = \left(Y_{\overline{S}_1}\right)_{\text{mod.c}} \cdot$$

$$\frac{\begin{vmatrix} 0 & D_{B1},D_2 & \cdot & D_{H1},r_4+D_{B1},r_4+D_{F1},r_4 \\ \varepsilon & -1 & \cdot & \cdot \\ -\varepsilon & D_{B3},D_2 & \cdot & \cdot \\ 0 & D_{B4},D_2 & \cdot & D_{H4},r_4+D_{B4},r_4+D_{F4},r_4-S_{U4},r_4 \end{vmatrix}}{|J_V|}$$

Die rechts stehende Zählerdeterminante kann nicht ohne weitere Angaben auf den Typ 1 oder 2 zurückgeführt werden, so daß sich über das Vorzeichen von (236) allgemein nichts sagen läßt. Es ist in diesem Fall somit unbestimmt, wie sich das Anwachsen der NFI auf die Effizienz der Offenmarktpolitik auswirkt.

Wir halten fest:
Wenn die Wirksamkeit der Offenmarktpolitik beurteilt werden soll, ist es offensichtlich nicht

gleichgültig, zu wessen Lasten die Erhöhung der Einlagen bei den NFI erfolgt (vgl. Fall b und c). Für die untersuchten Fälle gilt, daß sich zumindest keine eindeutige Verschlechterung der offenmarktpolitischen Effizienz nachweisen läßt[1].

---

1) A. Lindbeck ([55] , S. 184), D. Patinkin ([73] , S. 1o9 f.) und W.L. Smith ([97] , S. 539) bemerken, daß das Anwachsen der NFI zu einer Vergrößerung der Elastizität der Liquiditätspräferenzfunktion und damit zu einer Verschlechterung der Wirksamkeit der Offenmarktpolitik führt. Eine solche Erklärung scheint nicht ausreichend zu sein, um die Rolle der NFI zu charakterisieren. Es handelt sich einfach um eine in zu starkem Maße partialanalytische Betrachtung, die folgenden Aspekt übersieht: Nehmen wir an, die von den NFI gehaltenen Reserven seien niedriger als die Mindestreserven der Banken, und fassen wir sämtliche Financial Intermediaries zu einem Sektor zusammen, so kann man eine Erhöhung der Einlagen bei NFI zu Ungunsten der Einlagen bei Banken - also eine Umverteilung der Einlagen innerhalb der Financial Intermediaries - als eine Verringerung des Mindestreservesatzes auf sämtliche Einlagen auffassen. Daß eine solche Verringerung tendenziell in Richtung einer Erhöhung der offenmarktpolitischen Effizienz zielt, war bereits festgestellt worden. Gewiß, dies ist nur eine Komponente des Vorhandenseins von NFI - dorch wirkt sie der tendenziellen Erhöhung der Liquiditätspräferenz entgegen, so daß wir für genauere Untersuchungen tatsächlich ein Gesamtmodell benötigen.

V. Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit geht von der Geldschöpfungstheorie aus, die insbesondere an Hand eines Ansatzes von P. F. Smith diskutiert wird. Als Hauptnachteil erweist sich zum einen dessen stark partialanalytischer Charakter und zum anderen die Tatsache, daß die Rolle der Preise bei den Entscheidungen der einzelnen Wirtschaftssubjekte nicht klar zum Ausdruck kommt. Es wird zu zeigen versucht, warum aus diesen Gründen die von Smith verwendeten Markov'schen Ketten in der von ihm benutzten Form kein geeignetes Instrument für eine gesamtwirtschaftliche Gleichgewichtsanalyse darstellen.

Wenn an der Geldschöpfungstheorie bemängelt wird, daß die Preise in ihr nicht explizit berücksichtigt werden, liegt es nahe zu fragen, wie die von einzelnen Anlegern angebotenen und nachgefragten Forderungen (Papiere) von den Preisen abhängen. Dieses Problem der optimalen Portefeuillebestimmung wird im bekannten Rahmen eines Zweiperiodenmodells erörtert, bei dem die Preise der Papiere im Zeitpunkt 2 bestimmten Wahrscheinlichkeitsverteilungen unterliegen. Den Entscheidungen liegt das Bernoulli-Prinzip zugrunde, dessen im wesentlichen normativer Charakter erläutert wird.

Es zeigt sich, daß das Problem der optimalen Portefeuilleermittlung in wichtigen Punkten mit der Ermittlung eines optimalen Konsumplans übereinstimmt. Daher ist es auch möglich, die Reaktion der Anleger auf Preisänderungen oder auf Änderungen des Anfangsvermögens unter bestimmten Voraussetzungen durch Slutsky-Gleichungen zu beschreiben, bei denen der Substitutionseffekt das übliche Vorzeichen hat. Dieser von Royama und Hamada bereits für die quadratische Nutzenfunktion festgestellte Tatbestand wird

unter allgemeineren Bedingungen nachgewiesen.

Gesondert wird die Frage untersucht, inwieweit es bei der Portefeuilleanalyse einen "point of bliss" geben kann. Wir sehen, daß die Annahme eines stets positiven Grenznutzens für das Vermögen am Ende der Periode nicht ausreicht, um seine Existenz auszuschließen. Als mögliche Begründung läßt sich die Tatsache anführen, daß bei der Portefeuilleanalyse in der Regel die für die Preise der Papiere am Ende der Periode zugelassenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu allgemein sind: Bei ihnen können auch negative Preise mit einer von Null verschiedenen Wahrscheinlichkeit auftreten. Wenn diese Begründung richtig ist, darf es bei Verteilungen, die negative Preise mit der Wahrscheinlichkeit Null versehen, keinen "point of bliss" geben. Es wird gezeigt, daß dies bei logarithmischen Normalverteilungen in der Tat der Fall ist. Allerdings führt die Annahme logarithmischer Normalverteilungen dazu, daß die Analogie zwischen Portefeuilleanalyse und Haushaltstheorie zum Teil verloren geht.

Wir sehen in den folgenden Abschnitten, daß sich die Portefeuilleanalyse mit Hilfe von μ,σ-Prinzipien auch zur Ermittlung der optimalen Finanzierung verwenden läßt, und daß dabei die Restriktion der Liquiditätssicherung berücksichtigt werden kann. Allerdings zeigen sich die Grenzen eines solchen Ansatzes, wenn zum Beispiel bei Banken der Tatbestand beachtet werden soll, daß die zur Verfügung stehenden Einlagen gewissen Schwankungen unterliegen.

Die Portefeuilleanalyse wird in einem weiteren Abschnitt auf das Fisher'sche Modell zur Bestimmung des optimalen Konsums angewandt. Während Fisher annimmt, daß sich die heute nicht konsumierten Beträge mit einem festen Satz verzinsen, wird hier die Möglichkeit berücksichtigt, daß Papiere erworben werden

können, deren Preis am Ende der Periode nicht mit Sicherheit bekannt ist. Die ursprüngliche Analyse ändert sich in diesem Fall nur insoweit, als die Fisher'sche Bilanzgerade zwischen heutigem und morgigem (sicheren) Konsum durch eine Opportunitätskurve zwischen heutigem Konsum und dem zu einem optimalen Portefeuille gehörenden Sicherheitsäquivalent ersetzt wird. Der Verlauf dieser Opportunitätskurve wird in den Spezialfällen der konstanten absoluten und der konstanten relativen Risikoaversion rechnerisch ermittelt - und zwar unter der Voraussetzung, daß sich die Nutzenfunktion über heutigem und morgigem Konsum additiv zerlegen läßt, und daß für die Portefeuillebildung nur eine sichere und eine risikable Anlagemöglichkeit in Betracht kommt. In beiden Fällen erweist sich die Opportunitätskurve als linear - sie fällt mit der Fisher'schen Bilanzgeraden dann zusammen, wenn die erwartete Verzinsung des risikablen Papiers nicht größer ist als die des sicheren Papiers.

An diese Überlegungen schließt sich die Diskussion zweier Ansätze von Arrow bzw. Lintner zur Gleichgewichtsanalyse bei Risiko an. Es wird zu zeigen versucht, daß Arrows Uminterpretation für ein totales Konkurrenzgleichgewicht nicht ausreicht, um den in einer Welt des Risikos tatsächlich beobachteten Erwerb von Forderungen zu begründen, die auf Geld statt auf Güter gerichtet sind. Offenbar muß in einer Welt des Risikos bzw. der Unsicherheit auch berücksichtigt werden, daß Wirtschaftssubjekte ihre eigenen zukünftigen Präferenzen und/oder die Produktionsmöglichkeiten nicht genau kennen. Erst dann kann man die Liquiditätspräferenz erklären.

In der sich auf den Wertpapiermarkt beschränkenden Analyse von Lintner wird eine für alle Wertpapierpreise gleiche Grundstruktur aus der Forderung abgeleitet, daß die einzelnen Investoren ausschließlich effiziente Portefeuilles anlegen. Dieser Ansatz, für den in der

vorliegenden Arbeit eine vereinfachte Fassung angegeben wird, weist einige wesentliche Mängel auf. Da das Indifferenzkurvensystem bei der Preisermittlung nicht benutzt wird, kann nur eine für alle Preise gemeinsame Grundstruktur, nicht aber deren absolute Höhe angegeben werden. Für die Anbieter von Wertpapieren wird implizit ein sehr starres Finanzierungsverhalten unterstellt: Die Zahl der von ihnen emittierten Papiere hängt in keiner Weise von den Preisen dieser Papiere ab. Schließlich wird erläutert, warum eine von Lintner für seinen Ansatz angenommene erweiterte Interpretationsmöglichkeit nicht vorliegt. - Wie speziell Lintners Ansatz ist, läßt sich an einem Beispiel aufzeigen: Danach führt die Änderung des erwarteten Preises für ein bestimmtes Papier dazu, daß sich im Gleichgewicht ausschließlich der heutige Preis d e s s e l b e n Papiers ändert.

Wie durch die Portefeuilleanalyse nahegelegt, wird in einem positiven makroökonomischen Modell die Preisabhängigkeit der von den einzelnen Sektoren nachgefragten oder angebotenen Forderungen explizit berücksichtigt. Unter plausiblen Voraussetzungen läßt sich zeigen, daß die Wirksamkeit der Offenmarktpolitik bei einer Erhöhung des für Sichteinlagen bei Banken geltenden Mindestreservesatzes abnimmt - als Maßstab für die Wirksamkeit wird dabei der zur Erreichung einer bestimmten (nominalen) Einkommensänderung erforderliche Umfang der Offenmarktoperationen (in DM) benutzt. Es wird bestätigt, daß eine Erhöhung des Mindestreservesatzes nicht immer stabilisierend (im komparativ statischen Sinne) auf die durch Schwankungen der Investitionen hervorgerufenen Einkommensänderungen wirkt.

Eine stabilisierende Wirkung tritt genau dann ein, wenn eine Erhöhung (Senkung) der Investitionsnachfrage ceteris paribus zu einer Erhöhung (Senkung) der geplanten Einlagen bei Banken führt. Um dieses Ergebnis

plausibel zu machen, werden die Substitutions- und die Einkommenswirkung einer Erhöhung des Mindestreservesatzes unterschieden. Jede Vernachlässigung der Substitutionswirkung führt dazu, daß hohen Mindestreservesätzen gegenüber Schwankungen der Investitionen ein eindeutig stabilisierender Charakter zugesprochen werden muß. Dies ist bei den üblichen Modellen der Geldschöpfungstheorie der Fall, was darauf zurückzuführen ist, daß in der Regel die Preise bei ihnen nicht explizit eingeführt werden. Eine solche Nichtberücksichtigung der Preise erweist sich daher auch bei der Beurteilung politischer Instrumente als nachteilig.

Hingegen wirkt die Erhöhung des Mindestreservesatzes gegenüber den durch veränderte Bargeldhaltung hervorgerufenen Einkommensschwankungen eindeutig stabilisierend (im komparativ statischen Sinn).

An diesen Ergebnissen ändert sich nichts, wenn die Nonmonetary Financial Intermediaries (NFI) in die Analyse einbezogen werden.

Schließlich wird die Frage aufgegriffen, ob das Anwachsen der NFI die Wirksamkeit der Offenmarktpolitik beeinträchtigt. Da man unter einem Anwachsen mehreres verstehen kann, werden drei mögliche Interpretationen ausgewählt. Eine eindeutige Verringerung der offenmarktpolitischen Wirksamkeit läßt sich in diesen Fällen nicht nachweisen.

Auf die Grenzen der angestellten Überlegungen wird hingewiesen. So müßte in einer umfassenderen Untersuchung der in dieser Arbeit benutzte Maßstab für die Wirksamkeit einer bestimmten Politik neu überprüft werden. Darüber hinaus scheint es besonders wichtig, den dynamischen Aspekt sowohl in der mikrotheoretischen Portefeuilleanalyse wie in der makrotheoretischen Diskussion um die (de-)stabilisierende Wirkung von Mindestreserven stärker zu berücksichtigen.

Anhang I [1]

Wir nehmen an, es gebe eine endliche Anzahl möglicher Zustände der Welt. Sie seien durch den Vektor $\mathfrak{A}' = (a_1,\ldots,a_n)$ gekennzeichnet. Weiterhin sei unterstellt, daß aus dem Zustand a_i mit der Wahrscheinlichkeit w_{ij} der Zustand a_j folgt. Ausführlich geschrieben ergibt sich damit die folgende Übergangsmatrix W:

$$W = \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1n} \\ a_2 & w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_n & w_{n1} & w_{n2} & \cdots & w_{nn} \end{array}$$

mit $\sum_{j=1}^{n} w_{ij} = 1 \; ; \; (i=1,\ldots,n)$

und $w_{ij} \geq 0$.

Die Ränderung mit dem Vektor $\mathfrak{A}$ erfolgt nur zur Verdeutlichung.

Es sei

W^k = k-te Potenz von W

$w_j^{(k)}$ = Wahrscheinlichkeit dafür, daß nach k Schritten der Zustand j erreicht ist

$\mathfrak{w}^{(k)'} = [w_1^{(k)}, w_2^{(k)},\ldots,w_n^{(k)}]$

$\mathfrak{w}^{(o)'}$ = Zeilenvektor der Wahrscheinlichkeiten, mit denen die Zustände $\mathfrak{A}$ im Ausgangspunkt der Überlegung eintreten.

Dann gilt:

Satz 1: $\mathfrak{w}^{(k)'} = \mathfrak{w}^{(o)'} W^k$

---

1) Es handelt sich im wesentlichen um eine Wiedergabe aus J.G. Kemeny, A. Schleifer, jr., J.L. Snell, G.L. Thompson [47a] , S. 195 ff. und S. 278 ff.

Fragen wir etwa speziell, wie groß die Wahrscheinlichkeit $w_{ij}^{(k)}$ dafür ist, daß nach k Schritten aus dem Zustand a_i der Zustand a_j folgt, und bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}_{Zi}$ die i-te Zeile aus W und mit $\mathfrak{M}_{Sj}^{k}$ die j-te Spalte aus W^K, so folgt:

$$w_{ij}^{(k)} = \mathfrak{M}_{Zi}\mathfrak{M}_{Si}^{k-1} \quad .$$

Als regulär wird eine Matrix W dann bezeichnet, wenn irgend eine der Potenzen von W nur positive Koeffizienten enthält.

Für reguläre Matrizen W gilt

Satz 2: $\lim_{k\to\infty} W^k = \overline{W}$ mit $\overline{W} = [\overline{w}_{ij}]$ und

$$\mathfrak{M}_{Zi} = \mathfrak{M}_{Zj} \quad i,j = 1,\ldots,n \quad \text{und}$$

$$\overline{w}_{ij} \geq 0 \quad i,j = 1,\ldots,n \quad \text{wobei}$$

mit $\mathfrak{M}_{Zi}$ und $\mathfrak{M}_{Zj}$ die i-te bzw. j-te Zeile von $\overline{W}$ bezeichnet wird.

Betrachten wir auch hier wieder den oben erwähnten speziellen Fall, so ergibt sich unmittelbar

$$\lim_{k\to\infty} w_{ij}^{(k)} = \mathfrak{M}_{Zi} \lim_{k\to\infty} \mathfrak{M}_{Sj}^{k-1} = \mathfrak{M}_{Zi}\,\mathfrak{M}_{Sj}\ ^{1)} \quad .$$

Da wegen $\mathfrak{M}_{Zi} = \mathfrak{M}_{Zj}$ die Elemente des Spaltenvektors $\mathfrak{M}_{Sj}$ alle gleich sind, können wir für sie einfach $\overline{w}_j$ schreiben und erhalten hierdurch

$$\lim_{k\to\infty} w_{ij}^{(k)} = [w_{i1},\ldots,w_{in}] \cdot \begin{bmatrix} \overline{w}_j \\ \vdots \\ \overline{w}_j \end{bmatrix} = \overline{w}_j$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß sich der Zustand j ergibt, strebt mit wachsendem k einem Wert $\overline{w}_j$ zu, der von der Ausgangswahrscheinlichkeit unabhängig ist.

---

1) $\mathfrak{M}_{Sj}$ ist die j-te Spalte aus $\overline{W}$.

Eine besondere Stellung nehmen die sog. absorbierenden Markov'schen Ketten ein.
Ein Zustand a_j heißt absorbierend, wenn gilt $w_{jj} = 1$, d.h. wenn es unmöglich ist, ihn zu verlassen.
Eine Markov'sche Kette heißt absorbierend, wenn
1) $w_{jj} = 1$ für mindestens ein j mit j=1,...,n und
2) $w_{ij}^{(k)} > 0$ für mindestens ein k mit k=1,2,...
Es gilt
Satz 3: "Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Prozeß einer absorbierenden Markov'schen Kette absorbiert wird, ist 1."[1)]

Wir benötigen schließlich noch einen weiteren Zusammenhang.
Wenn die n möglichen Zustände so angeordnet werden, daß die ersten r absorbierend und die letzten s=n-r nicht absorbierend sind, läßt sich W in folgender Weise aufspalten:

$$W = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hdashline w_{r+1;1} & \cdots & w_{r+1;r} & w_{r+1;r+1} & \cdots & w_{r+1;n} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ w_{n,1} & \cdots & w_{n,r} & w_{n,r+1} & \cdots & w_{n,n} \end{array}\right]$$

Fassen wir die Untermatrizen in der durch die gestrichelte Trennungslinie angedeuteten Weise zusammen, so ergibt sich:

$W = \begin{bmatrix} E & O \\ R & Q \end{bmatrix}$, wenn mit E (Einheitsmatrix), O (Nullmatrix), R und Q die der Anordnung nach entsprechenden Teilmatrizen bezeichnet werden.

---

1) J.G. Kemeny, A. Schleifer, jr., J.L. Snell, G.L. Thompson [47a] , S. 287

Es sei nun $N = (E-Q)^{-1}$ die Inverse der Matrix E-Q. Dann gilt folgender

Satz 4: "Die Koeffizienten von N stellen ... für jeden nicht absorbierenden Ausgangszustand die Mittelwerte dafür dar, wie oft sich die Kette in jedem nicht absorbierenden Zustand befindet."[1)]

Anhang II

Es ist zu zeigen, daß

1. aus a) $\frac{d(R_A)}{dM_2} < 0$ folgt $E[U''\cdot r_e] \gtreqless 0$

2. aus b) $\frac{d(R_R)}{dM_2} > 0$ folgt $E[U''\cdot M_2 r_e] \lesseqgtr 0$.

Zu 1.: Wegen (7) und (8) ist

$(1)_{II}$ $E[U'\cdot(q_{22}-q_{12}q_{21})] = 0$ und definitionsgemäß

$(2)_{II}$ $M_2 \gtreqless M_1 q_{12}$ genau dann, wenn $r_e = q_{22}-q_{12}q_{21} \gtreqless 0$ d.h.

$$(3)_{II} \quad R_A(M_2) = -\frac{U''(M_2)}{U'(M_2)} \lesseqgtr -\frac{U''(M_1q_{12})}{U'(M_1q_{12})} = R_A(M_1q_{12}) ,$$

wenn $r_e \gtreqless 0$ gemäß Voraussetzung a).

Multiplikation von $(3)_{II}$ mit $-U'(M_2)r_e$ für $r_e \gtreqless 0$

ergibt wegen $-U'(M_2)r_e \lesseqgtr 0$

$$(4)_{II} \quad U''(M_2)\cdot r_e \gtreqless -R_A(M_1q_{12})\cdot U'(M_2)r_e \quad \text{und}$$

$$(5)_{II} \quad E[U''\cdot r_e] \gtreqless -R_A(M_1q_{12})\cdot E[U'\cdot r_e] = 0 \quad \text{wegen } (1)_{II}.$$

$(5)_{II}$ gilt auch für $r_e \lesseqgtr 0$, da sich dann in $(3)_{II}$ und $(4)_{II}$ die Vorzeichen umkehren (q.e.d.).

Zu 2.: Gemäß Voraussetzung b) folgt aus $r_e \gtreqless 0$

$$(6)_{II} \quad R_R(M_2) = -\frac{U''(M_2)M_2}{U'(M_2)} \gtreqless -\frac{U''(M_1q_{12})}{U'(M_1q_{12})} = R_R(M_1q_{12})$$

Multiplikation mit $-U'(M_2)r_e$ führt zu

$$(7)_{II} \quad U''(M_2)M_2 r_e \lesseqgtr -R_R(M_1q_{12})\cdot U'(M_2)r_e \quad \text{und}$$

---

1) J.G. Kemeny, A. Schleifer, jr., J.L. Snell, G.L. Thompson [47a] , S. 289

$(8)_{II}$ $E[U''\cdot M_2 r_e] \gtreqless -R_R\cdot E[U' r_e] = 0$ wegen $(1)_{II}$.

Auch diese Gleichung gilt für $r_e \gtreqless 0$ in gleicher Weise, da sich dann das Vorzeichen sowohl in $(6)_{II}$ wie in $(7)_{II}$ umkehrt (q.e.d.).
Insoweit handelt es sich um Beweise, die von A. Sandmo ([5o] , S. 121) erbracht, und die nur in die Symbolik der vorliegenden Arbeit übersetzt wurden. Sandmo beruft sich seinerseits auf eine mündliche Mitteilung von Arrow, der ähnliche Überlegungen in [48], S. 26 und [46] , S. 43 angestellt hatte, ohne dort die Beweise explizit anzugeben.

Wir wollen nun noch zeigen, daß unter den beiden Voraussetzungen a. und b. gilt:

$(9)_{II}$ $E[U''\cdot r_e\cdot q_{22}] \gtreqless 0$

d.h. daß für $\frac{dy_1}{dM_1}$ gemäß (11) wegen (14) folgende Aussage gemacht werden kann:

$(1o)_{II}$ $\frac{dy_1}{dM_1} \gtreqless 0$.

Wir wissen, daß wegen Voraussetzung b.

$$(11)_{II}\quad E[U''\cdot M_2 r_e] = E[U''\cdot(q_{12}q_{22}y_1 - q_{12}^2 q_{21}y_1 + q_{22}^2 y_2 - q_{12}q_{21}q_{22}y_2)]$$

$$= q_{12}y_1 E[U''\cdot(q_{22}-q_{12}q_{21})] + E[U''\cdot(q_{22}^2 - q_{12}q_{21}q_{22})]\cdot y_2 \gtreqless 0 .$$

Der erste Summand dieses Ausdrucks ist wegen $q_{12}, y_1 \gtrless 0$ und wegen 1. positiv oder gleich Null. Folglich muß für den zweiten Summanden gelten, daß er kleiner oder gleich Null ist. Beachten wir, daß für $q_{22}^2 - q_{12}q_{21}q_{22}$ wegen (13) auch $r_e q_{22}$ geschrieben werden kann, so folgt daraus bereits die behauptete Aussage.

Anhang III

Lintners eigene Darstellung der Gleichgewichtspreisbildung auf dem Wertpapiermarkt weicht von der im Text angeführten Kurzfassung ab. Der Grundgedanke und das Ergebnis sind jedoch dieselben. Um eine bessere Vergleichsmöglichkeit zu bieten, werden in der folgenden Übersicht die in dieser Arbeit und die von Lintner ([56]) benutzten Symbole gegenübergestellt:

Symbole bei Lintner	Symbole in dieser Arbeit
N_k	y_k^o
P_{ok}	q_{k1}
V_{ok}	$q_{k1}y_k^o$
h_k	$\frac{q_{k1}y_k^o}{M_1-q_{11}y_1^o}$
$\bar{H}_k$	$\bar{q}_{k2}y_k^o$
r_k	$\frac{q_{k2}-q_{k1}}{q_{k1}}$
$\bar{r}_k$	$\frac{\bar{q}_{k2}-q_{k1}}{q_{k1}}$
$1+r^*$	$\frac{q_{12}}{q_{11}}$
σ_k^2	$\frac{\sigma_{kk}}{q_{k1}^2}$
σ_{ik}	$\frac{\sigma_{ik}}{q_{11}q_{k1}}$
$\bar{x} = \sum_{k=2}^{n} h_k(r_k-r^*)$	$\frac{\sum_{k=2}^{n} y_k^o(q_{k2}-q_{k1}\frac{q_{12}}{q_{11}})}{M_1-q_{11}y_1^o}$
$\sigma_x^2 = \sum_{i=2}^{n}\sum_{k=2}^{n} h_i h_k \sigma_{ik}$	$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=2}^{n}\sum_{k=2}^{n} \sigma_{ik}y_i^o y_k^o}{(M_1-q_{11}y_1^o)^2}$
$(k=2,\ldots,n)$	$(k=2,\ldots,n)$

Lintners Gleichung (17) nimmt unter Verwendung von (16b), (1o), (7) und seiner Definition für T_o auf S. 598[1] die Form

$$(1)_{III} \quad P_{oj} = \frac{\bar{H}_j - \frac{\bar{x}}{\sigma_x^2 \sum_{k=2}^{n} V_{ok}} (\sigma_j^2 V_{oj}^2 + \sum_{k \neq j} \sigma_{jk} V_{oj} V_{ok})}{N_j(1+r^*)}$$

an. Ersetzt man gemäß obiger Übersicht die in $(1)_{III}$ vorkommenden Größen durch die in dieser Arbeit benutzten Symbole und beachtet, daß wegen der Budgetrestriktion

$$\sum_{k=2}^{n} q_{k1} y_k^o = M_1 - q_{11} y_1^o$$

gilt, so folgt:

$$(2)_{III} \quad q_{j1} = \left[\bar{q}_{j2} - \frac{\sum_{k=2}^{n} y_k^o (\bar{q}_{k2} - q_{k1} \frac{q_{12}}{q_{11}})}{\sum_{i=2}^{n} \sum_{k=2}^{n} \sigma_{ik} y_i^o y_k^o} \sum_{k=2}^{n} \sigma_{jk} y_k^o \right] \frac{q_{11}}{q_{12}}$$

Wie man bei Benutzung der letzten Gleichung aus (63) erkennt, ist dieser Ausdruck mit Gleichung (151) im Text identisch.

Damit ist gezeigt, daß die in der vorliegenden Arbeit angegebenen Gleichgewichtspreise auf dem Wertpapiermarkt tatsächlich mit den von Lintner ermittelten identisch sind.

---

1) Alle Angaben dieses Satzes beziehen sich auf J. Lintner [56].

Anhang IV

Im Teil IV der Arbeit werden bei Aussagen über Determinanten mehrfach folgende Sätze angewendet[1]:

"Proposition 1. Let A be an n x n indecomposable matrix with $a_{ii}>0$; $a_{ij}\leq 0$, $i\neq j$; $\sum a_{ij}\geq 0$ for all j and with strict inequality for at least one j. Then:

(i) $|A| > 0$

(ii) $A^{-1} > 0$; cofactor $a_{ij}>0$; $i,j=1,\ldots,n$.

Proposition 2. Let J be a matrix formed by replacing the first column of A above with a vector of non-positive elements $[y_i]$ with at least one $y_i<0$. Then:

(i) $|J| < 0$

(ii) The elements in the first row of J^{-1} are strictly negative."

Wenn eine Determinante die unter "Proposition 1" (bzw. "Proposition 2") angegebenen Eigenschaften besitzt, wird gesagt, sie sei vom Typ 1 (bzw. 2).

Es wird unterstellt, daß die in Abschnitt IV vorkommenden Determinanten unzerlegbar sind. Daß sie den für die Spaltensummen angegebenen Restriktionen genügen, läßt sich bei Gültigkeit der in (164), (175) und (21o) gemachten Annahmen leicht bestätigen.

Bei der Untersuchung der Vorzeichen für die in Abschnitt IV erörterten Multiplikatoren handelt es sich um Fragen der qualitativen Analyse. Lancaster[2] hat zur Behandlung solcher Probleme ein Lösungsverfahren angegeben, von dem er schreibt:

> "The solution algorithm is designed to determine the sign pattern or sign patterns of the solution of a system of linear equations Ax = 0 where

---

1) W.C. Brainard [15] , S. 139 f.

2) K. Lancaster [53] , S. 282

> the signs (including zeros) of the elements of the matrix A are known but the numerical values are unspecified. In the typical comparative static problem in economics the elements of A are partial derivatives of the functional relationships between the variables and the elements of x are differentials of the variables."

Es ist interessant zu sehen, daß dieser Algorithmus es (im Gegensatz zu der in der Arbeit benutzten Argumentation mit Hilfe von "Proposition" 1 und 2) nicht ermöglicht, die Vorzeichen der in Abschnitt IV behandelten Multiplikatoren eindeutig zu bestimmen. An Hand von a. (165) und

b. (2o9) mit $x = \bar{S}_1$

soll dies begründet werden. Wir geben nur die einzelnen Schritte des "Lancaster-Algorithmus" an. Eine ausführliche Begründung findet sich in 53 .

Zu a.: Die zu (165) mit $x = \bar{S}_1$ gehörende Vorzeichenmatrix hat in der von Lancaster angegebenen Schreibweise die Form

$$\begin{bmatrix} + & - & - & - \\ + & + & - & 0 \\ 0 & - & + & + \\ + & + & + & 0 \end{bmatrix}$$

Die letzte Zeile enthält die für die Spaltensummen der Koeffizientenmatrix ermittelten Vorzeichen. Zu dieser Vorzeichenmatrix gehören in Lancasters Schreibweise die Aufstellungen

```
MAT    1000              NEG   0111
       110z                    001z
       z011                    z100
       111z                    000z

LIST   0000   (NEG 4)              SOL   0101
       0001   (NEG 4)                    0110
       0010   (NEG 2)
       0011   (MAT 3;NEG 2)
       0100   (NEG 3)
       0101
       0110
       0111   (NEG 1)
```

Da "SOL" 2 Zahlen enthält, läßt sich über das Vorzeichen der zu (165) gehörenden Multiplikatoren nach Lancaster keine eindeutige Aussage machen.

Zu b.: Die zu (2o9) mit $x = \bar{S}_1$ gehörende Vorzeichenmatrix hat in der von Lancaster angegebenen Schreibweise die Form

$$\begin{bmatrix} + & + & - & - & - \\ + & - & - & - & 0 \\ + & + & + & - & 0 \\ + & 0 & + & + & 0 \end{bmatrix}$$

Die letzte Zeile enthält die für die Spaltensumme der Koeffizientenmatrix ermittelten Vorzeichen. Hierzu gehören wiederum die Aufstellungen:

```
MAT   11000              NEG   00111
      1000z                    0111z
      1110z                    0001z
      11011                    00100
      1z11z                    0z00z

LIST  00000   (NEG 5)    01000   (NEG 5)
      00001   (NEG 5)    01001   (NEG 5)
      00010   (NEG 3)    01010
      00011   (NEG 3     01011
      00100   (NEG 4)    01100
      00101              01101
      00110              01110   (NEG 2)
      00111   (NEG 1)    01111   (NEG 2)

SOL   00101
      00110
      01010
      01011
      01100
      01101
```

Da "SOL" mehr als eine Zahl enthält, läßt sich nach Lancaster auch hier keine eindeutige Aussage über das Vorzeichen der zu (2o9) gehörenden Multiplikatoren machen.

Literaturverzeichnis

[1] G. Ackley, Macroeconomic Theory, 5th. print., New York 1963.

[2] H. Albach, Investition und Liquidität, Wiesbaden 1962.

[3] M. Allais, Généralisations des théories de l'équilibre économique général et du rendement social au cas du risque, Econométrie (Colloque international d'Econométrie du 12 au 17 mai 1952) 81-12o, Hrsg. Centre National de la Recherche Scientifique, Paris 1953. Zitiert nach H. Schneeweiß [98] , S. 2o4.

[3a] M. Allais, "Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: Critiques des postulats et axiomes de l'école américaine", Econometrica, Oct. 1953, 21, 5o3-46.

[4] K.J. Arrow, Aspects of the Theory of Risk-Bearing, Helsinki 1965.

[5] K.J. Arrow, "Comment", Review of Economics and Statistics (Supplement), Febr. 1963, 45, 24-27.

[6] K.J. Arrow, "The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-bearing", Review of Economic Studies, 1964, 31, 91-96.

[7] J. Aschheim, "Financial Intermediaries and the Goals of Monetary Policy", American Economic Review (Papers and Proceedings), May 1963, 53, 36o-71.

[8] J. Aschheim, Techniques of Monetary Control, 2nd print., Baltimore 1966.

[9] W.J. Baumol, "An Expected Gain-Confidence Limit Criterion for Portfolio Selection", Management Science, Oct. 1963, 1o, 174-82, repr. in: E.B. Fredrikson, ed., Frontiers of Investment Analysis, Scranton Penns., 1965, S. 382-9o (Seitenangaben von dort).

[1o] R. Bellman, Dynamic Programming, 3rd print., Princeton 1962.

[11] A. Benavie, "Intermediaries in a Macroeconomic Model", Journal of Finance, Sept. 1967, 22, 441-65.

[12] G.O. Bierwag and M.A. Grove, "Indifference Curves in Asset Analysis", Economic Journal, June 1966, 76, 337-43.

[13] Z.W. Birnbaum, Introduction to Probability and Mathematical Statistics, New York 1962.

[14] K. Borch, "Indifference Curves and Uncertainty", Swedish Journal of Economics, March 1968, 7o, 19-24.

[15] W. C. Brainard, "Financial Intermediaries and a Theory of Monetary Control", Yale Economic Essays, Fall 1964, 4, 431-82, repr. in: D.D. Hester and J. Tobin, ed., Financial Markets and Economic Activity, Cowles Foundation Monograph 21, New York, London, Syndney 1967, S. 94-141 (Seitenangaben von dort).

[16] W.C. Brainard, "Uncertainty and the Effectiveness of Policy", American Economic Review (Papers and Proceedings), May 1967, 57, 411-25.

[17] W.C. Brainard and J. Tobin, "Econometric Models: Their Problems and Usefulness. Pitfalls in Financial Model Building", American Economic Review (Papers and Proceedings), May 1968, 58, 99-149.

[18] W. Breen, "Specific Versus General Models of Portfolio Selection", Oxford Economic Papers, N.S., Nov. 1968, 2o, 361-68.

[19] K. Brunner, "A Schema for the Supply Theory of Money", International Economic Review, Jan. 1961, 2, 79-1o9.

[2o] G. Clayton, "British Financial Intermediaries in Theory and Practice", Economic Journal, Dec. 1962, 72, 869-86.

[21] J.M. Culbertson, "Intermediaries and Monetary Theory: A Criticism of the Gurley-Shaw Theory", American Economic Review, March 1958, 48, 119-31.

[22] G. Debreu, Theory of Value. An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium, Cowles Foundation Monograph 17, 3rd print., New York, London, Sydney 1965.

[23] Deutsche Bundesbank, "Monatsberichte", lfd. Jahrgänge.

[24] E.C. Ettin, "A Note on the Growth of Nonbank Financial Intermediaries and Interest Rate Determination", Quarterly Journal of Economics, Nov. 1964, 78, 649-52.

[25] E.F. Fama, "Risk, Return and Equilibrium: Some Clarifying Comments", Journal of Finance, March 1968, 23, 29-4o.

[26] D.E. Farrar, The Investment Decision under Uncertainty, Englewood Cliffs, N.J., 1962.

[27] P.C. Fishburn, Decision and Value Theory, New York, London, Sydney 1964.

[28] I. Fisher, The Theory of Interest, New York 1930.

[29] G. Franke und H. Laux, "Die Ermittlung der Kalkulationszinsfüße für investitionstheoretische Partialmodelle", erscheint in: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, Nov./Dez. 1968, Jg. 20.

[30] G. Franke und H. Laux, "Investitions- und Finanzplanung mit Hilfe von Kapitalwerten", erscheint demnächst in der Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung.

[31] Dr. Gablers Wirtschaftslexikon, R. Sellien und H. Sellien, Hrsg., 2. Band L-Z, 7. Aufl., Wiesbaden 1967.

[32] G. Garvy, "Money, Liquid Assets, Velocity and Monetary Policy", Banca Nazionale del Lavoro Quarterly Review, Dec. 1964, 17, 323-38.

[33] S.J. Gass, Linear Programming. Methods and Applications, 2nd ed., New York et al. 1964.

[34] R.W. Goldsmith, Financial Intermediaries in the American Economy since 1900, Princeton 1958.

[35] H.J. Grossman, "Risk Aversion, Financial Intermediation, and the Term Structure of Interest Rates", Journal of Finance, Dec. 1967, 22, 611-22.

[36] J.G. Gurley and E.S. Shaw, "Financial Aspects of Economic Development", American Economic Review, Sept. 1955, 45, 515-38.

[37] J.G. Gurley and E.S. Shaw, Money in a Theory of Finance with a Mathematical Appendix by A.C. Enthoven, Washington 1960.

[38] G. Hadley, Nonlinear and Dynamic Programming, Reading Mass., Palo Alto, London 1964.

[39] H. Hax, "Investition und Finanzplanung mit Hilfe der linearen Programmierung", Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung, 1964, 16, 430-446.

[40] J.R. Hicks, "Liquidity", Economic Journal, Dec. 1962, 72, 787-802.

[41] J.R. Hicks, The Pure Theory of Portfolio Selection, in: Critical Essays in Monetary Theory, Oxford 1967, S. 103-125.

[42] J.R. Hicks, Value and Capital. An Inquiry into Some Fundamental Principles of Economic Theory, 2nd ed., Oxford 1965.

[43] J. Hirshleifer, "Investment Decision under Uncertainty: Choice-Theoretic Approaches", Quarterly Journal of Economics, Nov. 1965, 79, 509-36.

[44] J. Hirshleifer, "Investment Decision under Uncertainty: Applications of the State-Preference Approach", Quarterly Journal of Economics, May 1966, 8o, 252-77.

[45] H. Hoffmann, Dispositionsregeln zur Solvenzsicherung von Depositenbanken, Diss. Saarbrücken 1967.

[46] G. Jaeger, Entwicklung der sekundären Finanzierungsinstitute in der Bundesrepublik Deutschland und ihre Bedeutung für die Zentralbankpolitik, in: E. Schneider, Hrsg., Kieler Studien, Tübingen 1968.

[47] H.G. Johnson, "Monetary Theory and Policy", American Economic Review, June 1962, 52, 335-84.

[47a] J.G. Kemeny, A. Schleifer, jr., J.L. Snell, G.L. Thompson, Mathematik für die Wirtschaftspraxis, Berlin 1966.

[48] M.G. Kendall and A. Stuart, The Advanced Theory of Statistics, in Three Volumes, Vol. 1, Distribution Theory, 2nd ed., London 1963.

[49] J.M. Keynes, The General Theory of Employment, Interest and Money, London 1936.

[5o] W.A. Koivisto, Principles and Problems of Modern Economics, New York, London 1957.

[51] W. Krelle, Preistheorie, Tübingen, Zürich 1961.

[52] H.P. Künzi und W. Krelle unter Mitwirkung von W. Ottli, Nichtlineare Programmierung, Monographien zur Unternehmungsforschung, Bd. 1, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1962.

[53] K. Lancaster, "The Solution of Qualitative Comparative Static Problems", Quarterly Journal of Economics, May 1966, 8o, 278-95.

[54] A.P. Lerner, Diskussionsbeitrag zu: "Financial Institutions and Monetary Policy: A Re-Examination of their Interrelationship", American Economic Review (Papers and Proceedings), May 1963, 53, 4o1-o7.

[55] A. Lindbeck, A Study in Monetary Analysis, Stockholm 1963.

[56] J. Lintner, "Security Prices, Risk, and Maximal Gains from Diversification", Journal of Finance, Dec. 1965, 2o, 587-615.

[57] J. Lintner, "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets", Review of Economics and Statistics, Febr. 1965, 47, 13-37, repr. in: St.H. Archer and Ch.A. D'Ambrosio, ed., The Theory of Business Finance: A Book of Readings, New York, London 1967, S. 671-713 (Seitenangaben dort).

[58] R.G. Lipsey and P.O. Steiner, Economics, 2nd print., New York, London, Tokyo 1966.

[59] R.D. Luce and H. Raiffa, Games and Decisions, New York 1957.

[6o] F.A. and V. Lutz, The Theory of Investment of the Firm, Princeton 1951.

[61] E. Malinvaud, "The Analogy Between Atemporal and Intertemporal Theories of Resource Allocation", Review of Economic Studies, 196o-61, 28, 143-6o.

[62] E. Malinvaud, "Note on von Neumann-Morgenstern's Strong Independence Axiom", Econometrica, Oct. 1952, 2o, 679.

[63] A.S. Manne, "The Strong Independence Assumption - Gasoline Blends and Probability Mixtures", Econometrica, Oct. 1952, 2o, 665-68.

[64] H.M. Markowitz, "Portfolio Selection", Journal of Finance, March 1952, 7, 77-91, repr. in: E.B. Fredrikson, ed., Frontiers of Investment Analysis, Scranton Penns. 1965 (Seitenangaben von dort).

[65] H.M. Markowitz, Portfolio Selection. Efficient Diversification of Investments, Cowles Foundation Monograph 16, 2nd print., New York, London, Sydney 1965.

[66] J. Marschak, "Rational Behavior, Uncertain Prospects, and Measurable Utility", Econometrica, April 195o, 18, 111-41.

[67] A.D. Martin, Jr., "Mathematical Programming of Portfolio Selections", Management Science, Jan. 1955, 1, 152-66, repr. in: E.B. Fredrikson, ed., Frontiers of Investment Analysis, 2nd print., Scranton, Penns. 1966, S. 367-81.

[68] D.D. McFarlane, Application to the Markowitz Portfolio Selection Model as a Managerial Tool, Diss. Indiana University 1966.

[69] J.P. McKenna, Aggregate Economic Analysis, rev. ed., New York et al., 1965.

[7o] P. Mosteller and P. Nogee, "An Experimental Measurement of Utility", Journal of Political Economy, 1951, 59, 371-4o4.

[71] J.v. Neumann und O. Morgenstern, Spieltheorie und wirtschaftliches Verhalten, Würzburg 1961.

[72] J. Pfanzagl, Subjective Probability Derived from the Morgenstern - von Neumann Utility Concept, in: M. Shubik, ed., Essays in Mathematical Economics in Honor of Oskar Morgenstern, Princeton N.J. 1967, S. 237-51.

[73] D. Patinkin, "Financial Intermediaries and the Logical Structure of Monetary Theory", American Economic Review, March 1961, 51, 95-116.

[74] D. Patinkin, Money, Interest, and Prices. An Integration of Monetary and Value Theory, 2nd ed., New York 1965.

[75] B.P. Pesek and Th.R. Saving, Money, Wealth, and Economic Theory, New York, London 1967.

[76] J.W. Pratt, "Risk Aversion in the Small and in the Large", Econometrica, Jan.-Apr. 1964, 32, 122-36.

[77] R. Radner, "Competitive Equilibrium under Uncertainty", Econometrica, Jan. 1968, 36, 31-58.

[78] R. Richter, "Die Rolle der Banken in makroökonomischen Modellen", Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Heft 6, 1967, 18o, 441-62.

[79] R. Richter, Preistheorie, Wiesbaden 1963.

[8o] R. Richter, "The Banking System within Macro-Economic Theory", erscheint demnächst in: German Economic Review.

[81] H. Rittershausen, Die Zentralnotenbank. Ein Handbuch ihrer Instrumente, ihrer Politik und ihrer Theorie, Frankfurt a.M. 1962.

[82] A.A. Robichek and St. C. Myers, "Valuation of the Firm: Effects of Uncertainty in a Market Context", Journal of Finance, May 1966, 21, 215-27.

[83] A.D. Roy, "Safety First and the Holding of Assets", Econometrica, July 1952, 2o, 431-49.

[84] S. Royama and K. Hamada, Substitution and Complementarity in the Choice of Risky Assets, in: D.D. Hester and J. Tobin, ed., Risk Aversion and Portfolio Choice, Cowles Foundation Monograph 19, New York, London, Sydney 1967, S. 27-5o.

[85] P.A. Samuelson, Economics. An Introductory Analysis, 6th ed., New York et al. 1964.

[86] P.A. Samuelson, Foundations of Economic Analysis, 8th print., Cambridge Mass. 1966.

[87] P.A. Samuelson, "Probability and the Attempts to Measure Utility", Economic Review (Keizai Kenkyu), July 195o, 1, 167-73, repr. in: F. Stiglitz, ed., The Collected Scientific Papers of P.A. Samuelson, Vol. 1, Cambridge Mass. and London 1966, S. 117-26.

[88] P.A. Samuelson, Utility, Preference, and Probability, in: E. Stiglitz, ed., The Collected Scientific Papers of P.A. Samuelson, Vol. 1, Cambridge Mass. and London 1966, S. 127-36.

[89] A. Sandmo, "Portfolio Choice in a Theory of Saving", Swedish Journal of Economics, Juni 1968, 7o, 1o6-22.

[9o] L.J. Savage, The Foundations of Statistics, New York, London 1954.

[91] R.S. Sayers, "Monetary Thought and Policy in England", Economic Journal, Dec. 196o, 7o, 71o-24.

[92] R. Shapiro, "Financial Intermediaries, Credit Availability and Aggregate Demand", Journal of Finance, Sept. 1966, 21, 459-78.

[93] E. Shapiro, Macroeconomic Analysis, New York, Chicago, Burlingame 1966.

[94] W.F. Sharpe, "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Condition of Risk", Journal of Finance, Sept. 1964, 19, 425-42, repr. in: St. H. Archer and Ch. A. D'Ambrosio, ed., The Theory of Business Finance: A Book of Readings, S. 653-7o (Seitenangaben von dort).

[95] R.A. Shearer, "The Expansion of Bank Credit: An Alternative Approach", Quarterly Journal of Economics, Aug. 1963, 77, 485-5o2.

[96] P.F. Smith, "The Concepts of Money and Commercial Banks", Journal of Finance, Dec. 1966, 21, 635-48.

[97] W.L. Smith, "Financial Intermediaries and Monetary Controls", Quarterly Journal of Economics, Nov. 1959, 73, 533-53.

[98] H. Schneeweiß, Entscheidungskriterien bei Risiko, in: M. Beckmann et al., ed., Ökonometrie und Unternehmensforschung VI, Berlin, Heidelberg, New York 1967.

[99] E. Schneider, Einführung in die Wirtschaftstheorie, II. Teil: Wirtschaftspläne und wirtschaftliches Gleichgewicht in der Verkehrswirtschaft, 11. durchgesehene Aufl., Tübingen 1967.

[1oo] E. Schneider, Einführung in die Wirtschaftstheorie, III. Teil: Geld, Kredit, Volkseinkommen und Beschäftigung, 1o. verb. Aufl., Tübingen 1967

[1o1] E. Schneider, Wirtschaftlichkeitsrechnung. Theorie der Investition, 3. durchgesehene Aufl., Tübingen, Zürich 1961.

[1o2] A. Stobbe, Volkswirtschaftliches Rechnungswesen, Berlin, Heidelberg, New York 1966.

[103] W. Stützel, Bankpolitik heute und morgen, 2. Aufl., Frankfurt a.M. 1964.

[104] W. Stützel, Ist die goldene Bankregel eine geeignete Richtschnur für die Geschäftspolitik der Kreditinstitute? in: Vorträge für Sparkassenprüfer, Kiel 1959.

[105] L. Tarshis, Modern Economics. An Introduction, New York et al. 1967.

[106] H. Theil in association with P.J.M. Van Den Bogaard assisted by A.P. Barten, J.C.G. Boot, C. van de Panne, Optimal Decision Rules for Government and Industry, in: H. Theil, ed., Studies in Mathematical and Managerial Economics, Vol. 1, Amsterdam, Chicago 1964.

[107] H.A. Thomas, Jr., A Method of Accounting for Benefit and Cost Uncertainties in Water Resources Project Design, mimeo (Cambridge: Harvard Program in Water Resources, April 1958), zitiert nach: D.E. Farrar, [26], S. 15.

[108] R.S. Thorn, "Nonbank Financial Intermediaries, Credit, Expansion, and Monetary Policy", IMF Staff Papers, 1957-58, 6, 369-83.

[109] J. Tobin, Commercial Banks as Creators of "Money", Banking and Monetary Studies, ed., D. Carson, for the Comptroller of the Currency, U.S. Treasury (Homewood, Ill,: R.D. Irwin, Inc. 1963), S.408-19, repr. in: D.D. Hester and J. Tobin, ed., Financial Markets and Economic Activity, Cowles Foundation Monograph 21, New York, London, Sydney 1967, S. 1-11 (Seitenangaben von dort).

[110] J. Tobin and W.C. Brainard, Financial Intermediaries and the Effectiveness of Monetary Controls, American Economic Review, May 1963, 53, 383-400, repr. in: D.D. Hester and J. Tobin, ed., Financial Markets and Economic Activity, Cowles Foundation Monograph 21, New York, London, Sydney 1967, S. 55-93 (Seitenangaben von dort).

[111] J. Tobin, "Liquidity Preference on Behavior Towards Risk", Review of Economic Studies, Febr. 1958, 25, 65-86, repr. in: D.D. Hester and J. Tobin, ed., Risk Aversion and Portfolio Choice, Cowles Foundation Monograph 19, New York, London, Sydney 1967, S. 1-26.

[112] J. Tobin, The Theory of Portfolio Selection, in: F.H. Hahn and F.P.R. Brechling, ed., The Theory of Interest Rates, London 1965, S. 3-51.

[113] H.M. Weingartner, Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting Problems, Englewood Cliffs N.J. 1963.